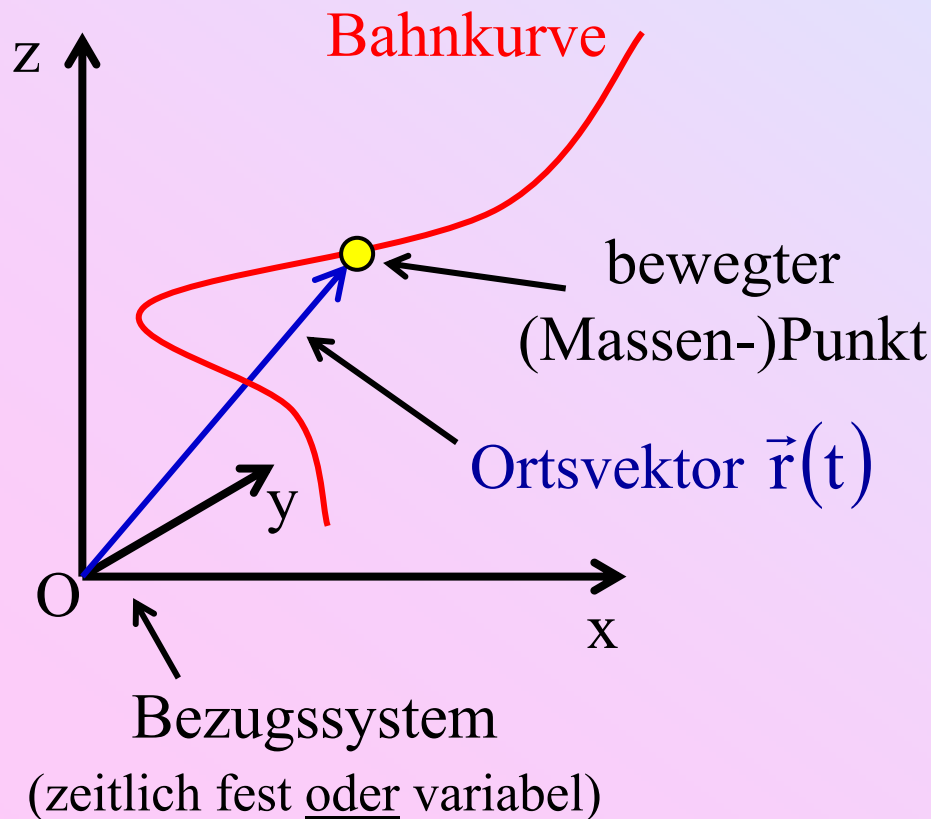


2. Newtonsche Mechanik

2.1. Kinematik

Kinematik: Beschreibung von Bewegungsabläufen

Dynamik: Lehre der Ursachen von Bewegungen (Kräfte, Massen)



kartesische Koordinaten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Beispiele:

a) Geradlinige, gleichförmige Bewegung in der (x,y)-Ebene

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cdot t \\ y = b \cdot t \\ z = 0 \end{array} \right\} \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

oder äquivalent

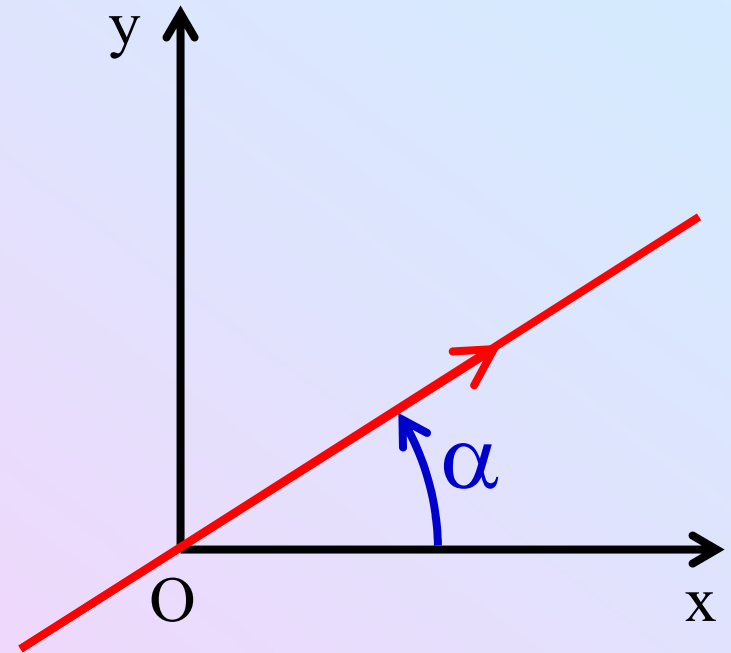
$$x = v \cdot t \cdot \cos \alpha$$

$$y = v \cdot t \cdot \sin \alpha$$

$$z = 0$$

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}$$

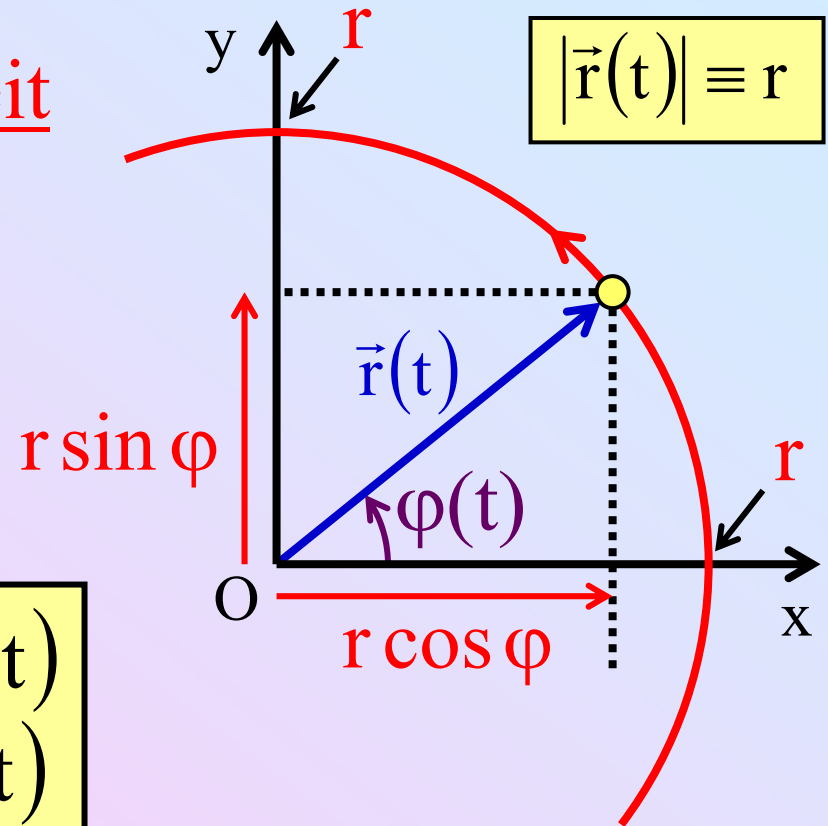
Geschwindigkeit



b) Gleichförmige Kreisbewegung in der (x,y)-Ebene

$$\varphi(t) \propto t \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \omega \cdot t$$

$\omega =$ Winkelgeschwindigkeit



$$x(t) = r \cdot \cos \varphi(t) = r \cdot \cos(\omega t)$$

$$y(t) = r \cdot \sin \varphi(t) = r \cdot \sin(\omega t)$$

$$z(t) = 0$$

2.1.1. Geschwindigkeit

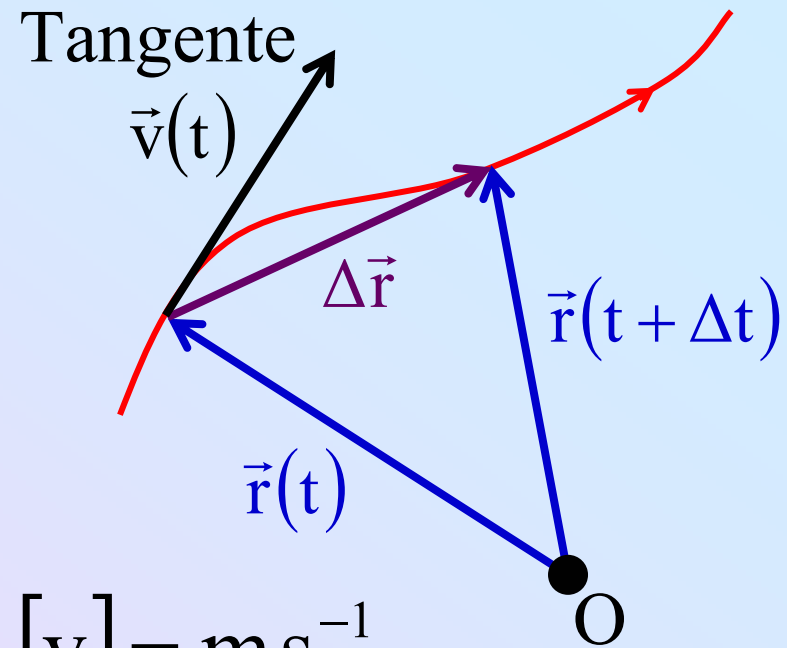
$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Def.: Momentangeschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

Def.: Mittlere Geschwindigkeit:

$$\langle \vec{v} \rangle(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \vec{v}(\tau) d\tau$$



$$[v] = \text{ms}^{-1}$$

Es gilt:

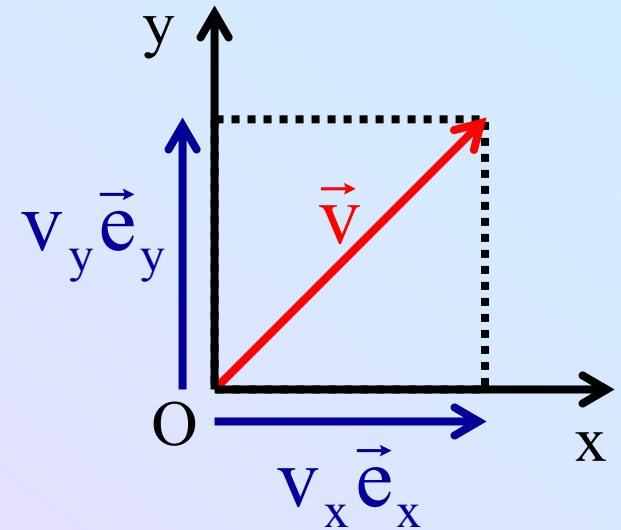
$$\langle \vec{v} \rangle(t, \Delta t) = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Beweis: \rightarrow Tafel

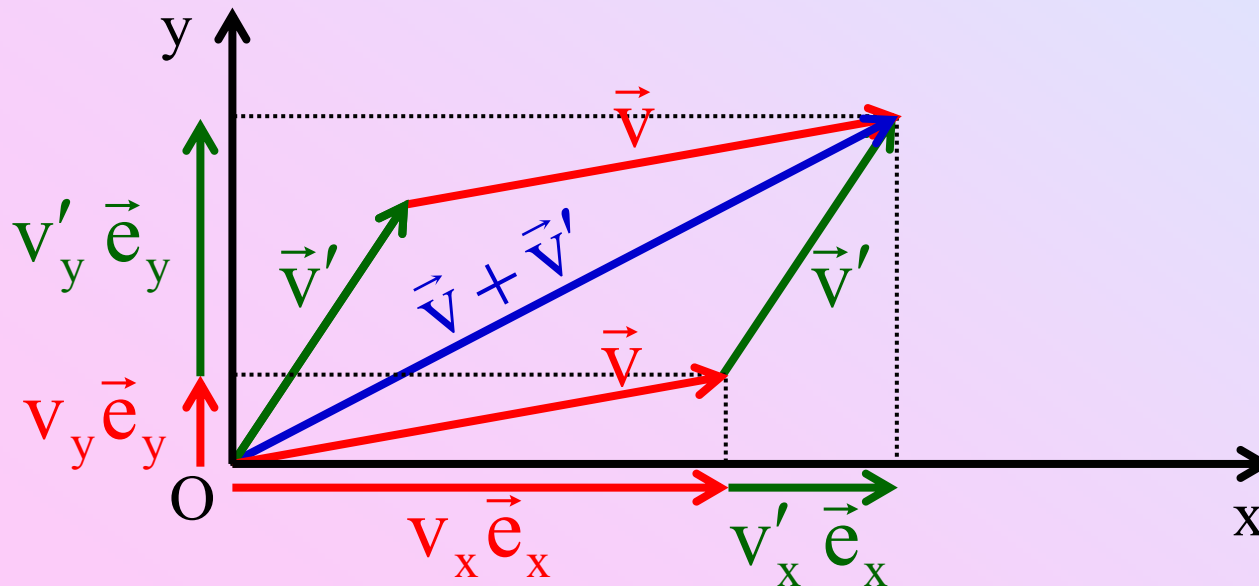
2.1.2. Addition von Geschwindigkeiten

Komponentenzerlegung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$



Addition komponentenweise:



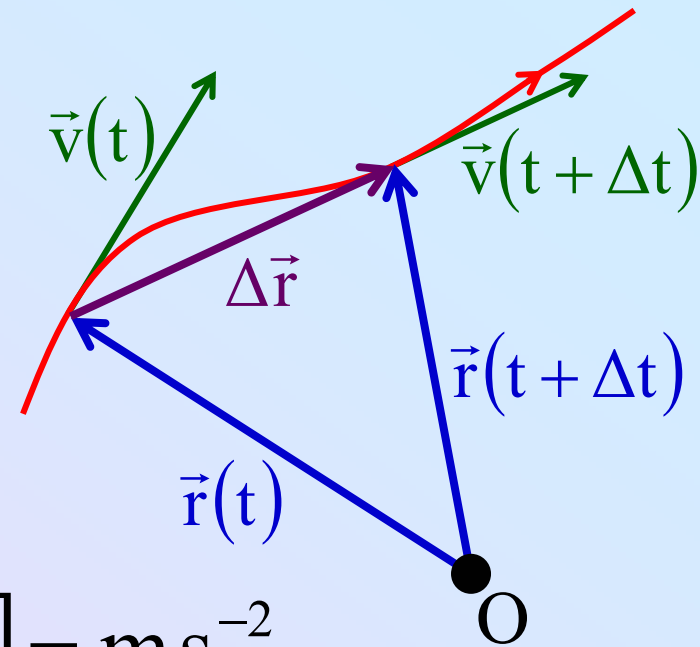
2.1.3. Beschleunigung

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

Def.: **Momentanbeschleunigung**

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}$$

$$[a] = \text{ms}^{-2}$$



Def.: **Mittlere Beschleunigung:**

$$\langle \vec{a} \rangle(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \vec{a}(\tau) d\tau = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Addition wie bei Geschwindigkeit (wie bei allen Vektoren)

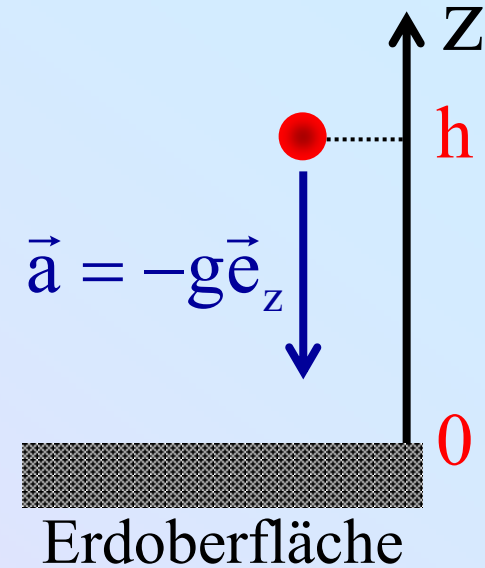
2.1.4. Einfache Bewegungsabläufe

a) Freier Fall:

Massenanziehung \Rightarrow Erdbeschleunigung g

$$\frac{dv_z}{dt} = -g = \text{const.}$$

$$g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$$



Tafelrechnung \Rightarrow

$$v_z(t) = -gt$$

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Fallzeit T :

$$z(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}gT^2$$

\Rightarrow

$$g = \frac{2h}{T^2}$$

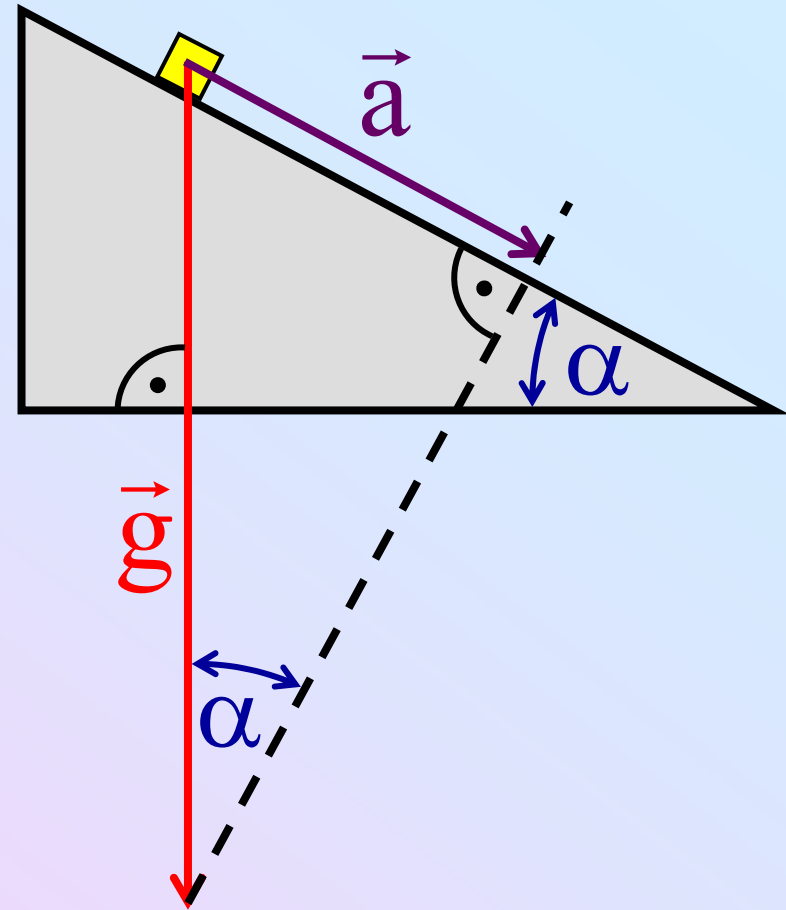
\rightarrow Methode zur Messung von g

b) Schiefe Ebene:

Tangentialbeschleunigung:

$$a = g \sin \alpha = \text{const.}$$

⇒ Lösung wie im freien Fall



Gerutschte Strecke $s(t)$:

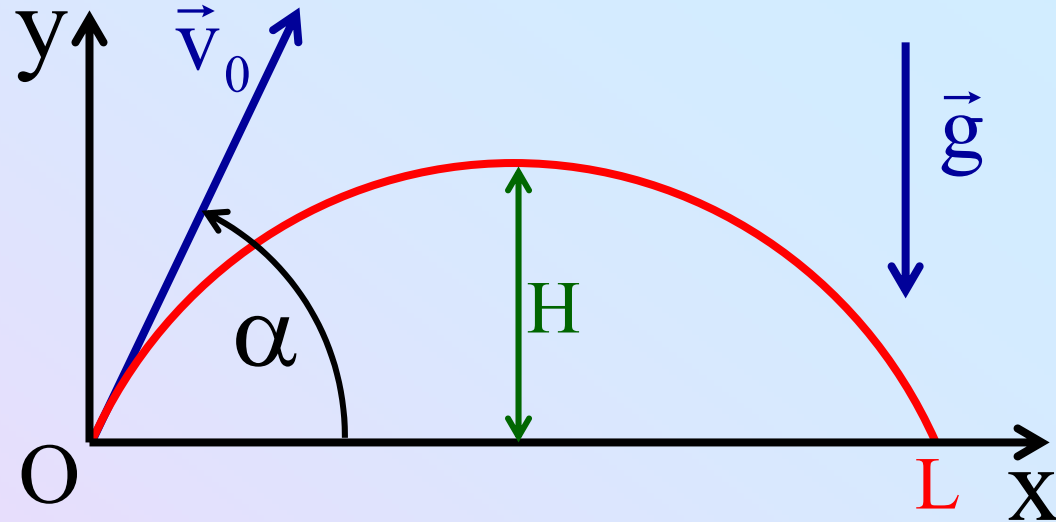
$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \propto \sin \alpha$$

Laufzeit:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \alpha}} \propto \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}}$$

c) Wurfparabel:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$



⇒ komponentenweise konstante Beschleunigung → wie freier Fall

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_y$$

- $x(t) = v_{0x} t$ **unabhängig von** v_{0y}
- $x(t) \propto t, y(t) \propto t^2 \Rightarrow y(x)$ **ist Parabel**

Tafelrechnung ⇒

$$\text{Wurfweite} \\ L = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

$$\text{Wurfhöhe} \\ H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

$H = \max$ bei $\alpha = 90^\circ$

2.2. Dynamik von Massenpunkten

2.2.1. Trägheit

Trägheitsprinzip (Galilei): Ohne äußere Einflussnahme bleibt die Geschwindigkeit eines Körpers konstant.

1. Newtonsches Axiom: Wirken keine äußeren **Kräfte**, bleibt die Geschwindigkeit eines Körpers konstant.

Voraussetzung: Koordinatensystem bewegt sich
unbeschleunigt \leftrightarrow **Inertialsystem**

... unbeschleunigt gegen was?

→ Ruhesystem des Weltalls ...

→ ... der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung

2.2.2. Kräfte und Massen

2. Newtonsches Axiom (Aktionsprinzip): Wirkt auf einen **Massenpunkt** der (trägen) **Masse** m eine **Kraft** \vec{F} , so erfährt er eine Beschleunigung \vec{a} mit

Bewegungsgleichung:
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Definition der Massen-Einheit: $[m] = 1 \text{ kg}$ (Kilogramm)

1 kg ist definiert durch **Normal** (hier: Platin-Iridium-Zylinder, gelagert in Paris)

Definition der Kraft-Einheit: $[F] = 1 \text{ kg m s}^{-2} = 1 \text{ N}$ (Newton)

\Rightarrow 1 N ist die Kraft, die das Massen-Normal mit 1 m s^{-2} beschleunigt

(Eine) Messvorschrift für Kräfte und Massen:

Kleine Auslenkung \Rightarrow

Hookesches Gesetz

$$F = D \cdot (x - x_0)$$

$D =$ Federkonstante

Eichmessung mit Massen-Normal:

$$F = m_{1\text{kg}} g = D \cdot (x_{1\text{kg}} - x_0)$$

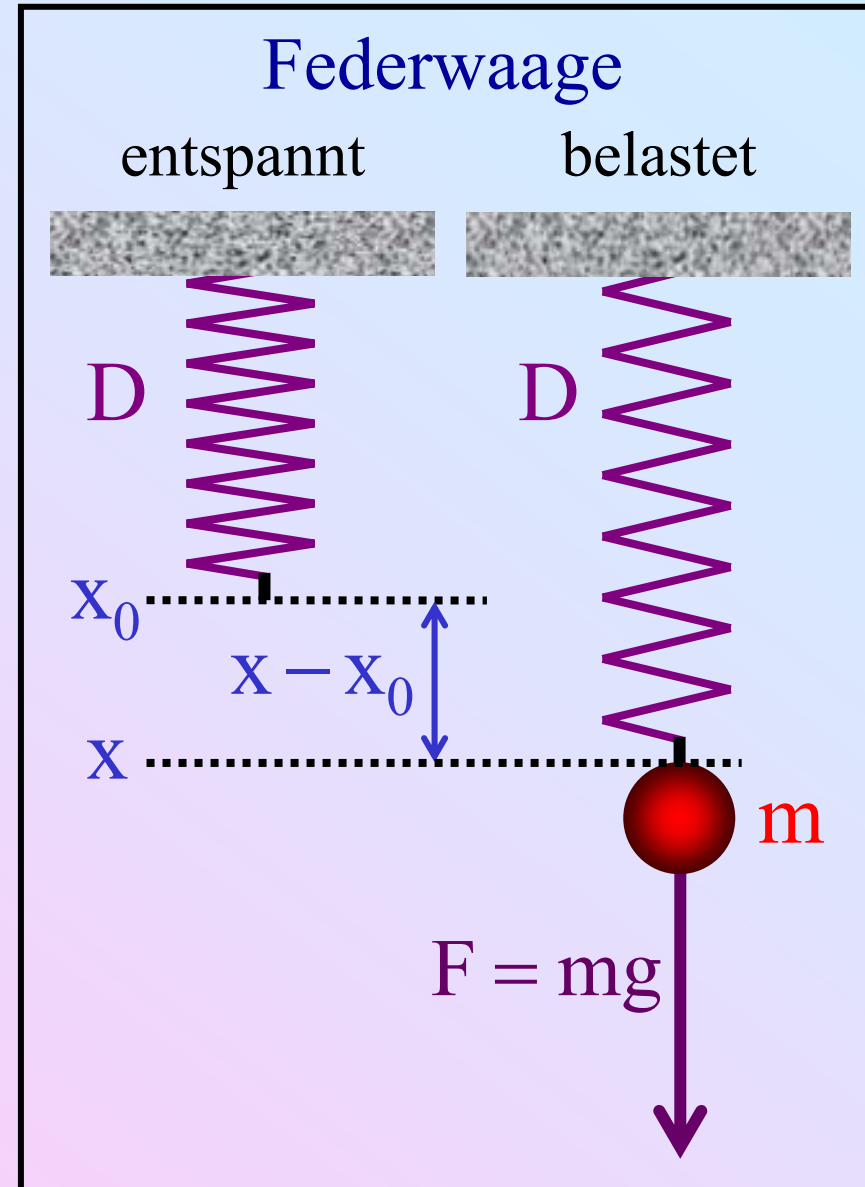
$$\Rightarrow D = \frac{m_{1\text{kg}} g}{x_{1\text{kg}} - x_0}$$

Kraftmessung

$$F = D \cdot (x - x_0)$$

Massenmessung

$$m = \frac{D}{g} \cdot (x - x_0)$$



Bemerkungen:

a) Dichte:

Ausgedehnte homogene Körper: **Volumen $V \propto$ Masse m**

Definition: **Dichte: $\rho = \frac{m}{V}$, $[\rho] = 1 \text{ kg m}^{-3}$**

Beispiel: $\rho(\text{H}_2\text{O}, 4^\circ\text{C}, 1 \text{ bar}) = 1000 \text{ kg m}^{-3} = 1 \text{ kg}/\ell$
 $1 \ell = 1 \text{ Liter} = 1 \text{ dm}^3$

b) Schwere Masse: Quelle des Gravitationsfeldes

z.B. freier Fall

$$\begin{array}{c} \text{Schwere Masse der Erde} \\ \downarrow \\ F_G = G_N \frac{M_E}{R_E^2} m_S \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{const.} & & \text{Erdradius} \\ \text{Gravitationskraft} & & \text{Schwere Masse} \end{array} \end{array}$$
$$\begin{array}{c} F_T = m_T g \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{Trägheitskraft} & \text{Träge Masse} \end{array} \end{array}$$

Experiment $\Rightarrow \frac{F_G}{F_T} = \frac{G_N M_E}{g R_E^2} \cdot \frac{m_S}{m_T}$ ist unabhängig von m_T (auf 10^{-10})

Folgerung: $m_S \propto m_T$

\rightarrow Festlegung:

$$m_S = m_T \equiv m$$

\Rightarrow Gravitationskonstante

$$G_N = \frac{F_G}{F_T} \cdot \frac{g R_E^2}{M_E} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

\rightarrow Äquivalenzprinzip (allgemeine Relativitätstheorie):
Trägheitskräfte und Gravitationskräfte sind in der Umgebung einer Testmasse **prinzipiell** ununterscheidbar

c) Impuls:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$[p] = \text{kg m s}^{-1}$$

2. Newtonsches Axiom (allgemein für $m \neq \text{const.}$):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} + \dot{m}\vec{v}$$

(relevant bei Systemen von Massenpunkten)

d) Addition von Kräften:

Kraft ist Vektor \Rightarrow übliche Vektoraddition

3. Newtonsches Axiom (Reaktionsprinzip): Unterliegen zwei **Massenpunkte** keinen äußeren Kräften, so wird jede Kraftwirkung des einen Punktes auf den anderen durch eine gleichgroße Gegenkraft kompensiert.



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

2.2.3. Kraftfelder

Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

Zeitabhängige Kraft, die auf einen Massenpunkt mit einer bestimmten Geschwindigkeit irgendwo im Raum wirkt

Statisches Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$

Häufig: $\vec{F}(\vec{r})$

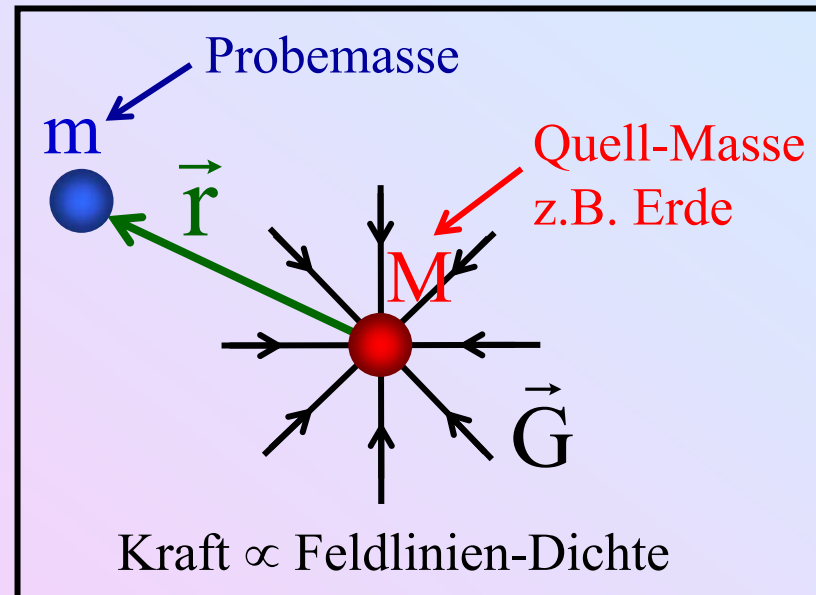
Beispiele:

a) Zentralkraftfeld

| Gravitationsfeld | Kraftfeld |
|--|----------------------|
| $\vec{G} = -G_N \frac{M}{r^2} \vec{e}_r$ | $\vec{F} = m\vec{G}$ |

Analog: Elektrisches Feld

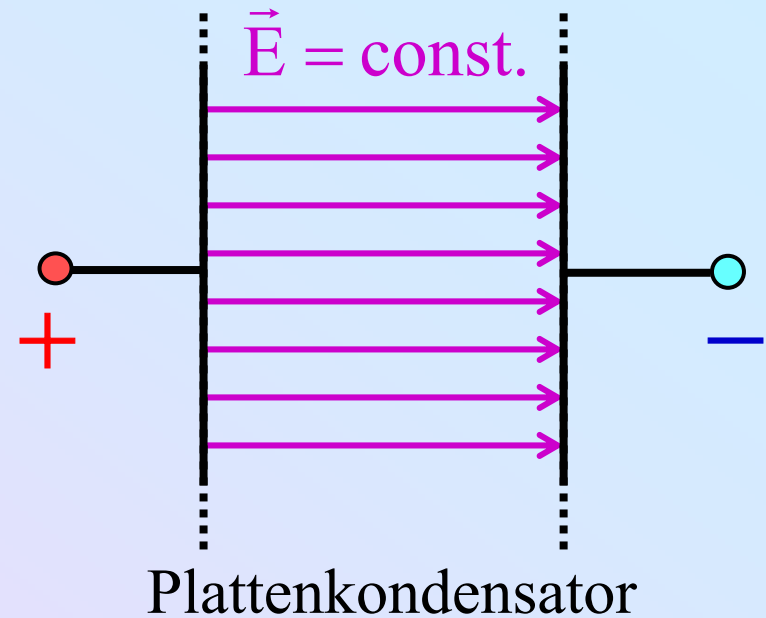
| | |
|--|----------------------|
| $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$ | $\vec{F} = q\vec{E}$ |
|--|----------------------|



Q: Quellladung
q: Probeladung

b) Homogenes Kraftfeld

$$\vec{F} = q\vec{E} = \text{const.}$$



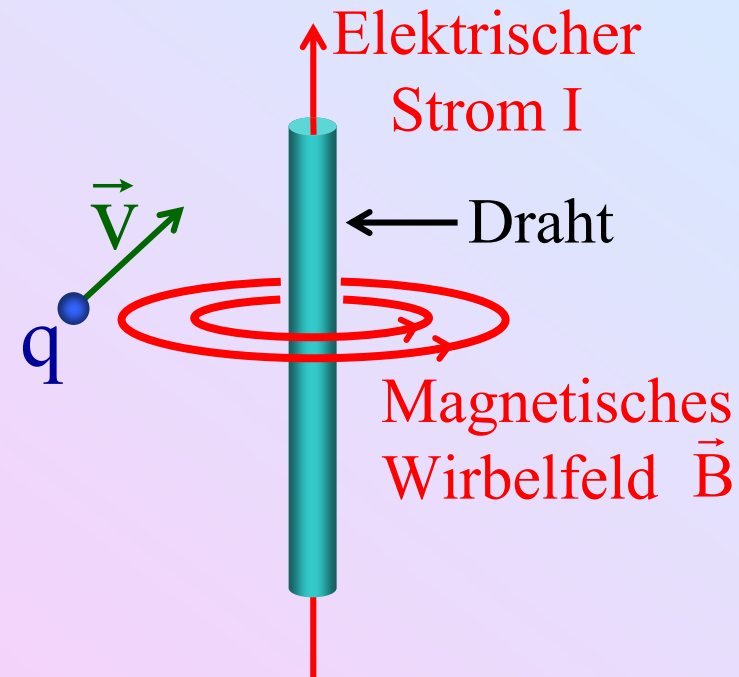
c) Wirbelfeld

Magnetisches Feld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{e}_\varphi$$

Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}) = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$



d) Komplizierterer Fall:

Magnetisches Wechselfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$

\Rightarrow Kraftfeld für Testladung q mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ am Ort \vec{r}

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q \cdot \left[\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{E}(\vec{r}, t) \right]$$

Fundamentale Kraftfelder:

- Gravitation
- Elektromagnetisch
- Stark (Kernkraft)
- Schwach (Radioaktivität)

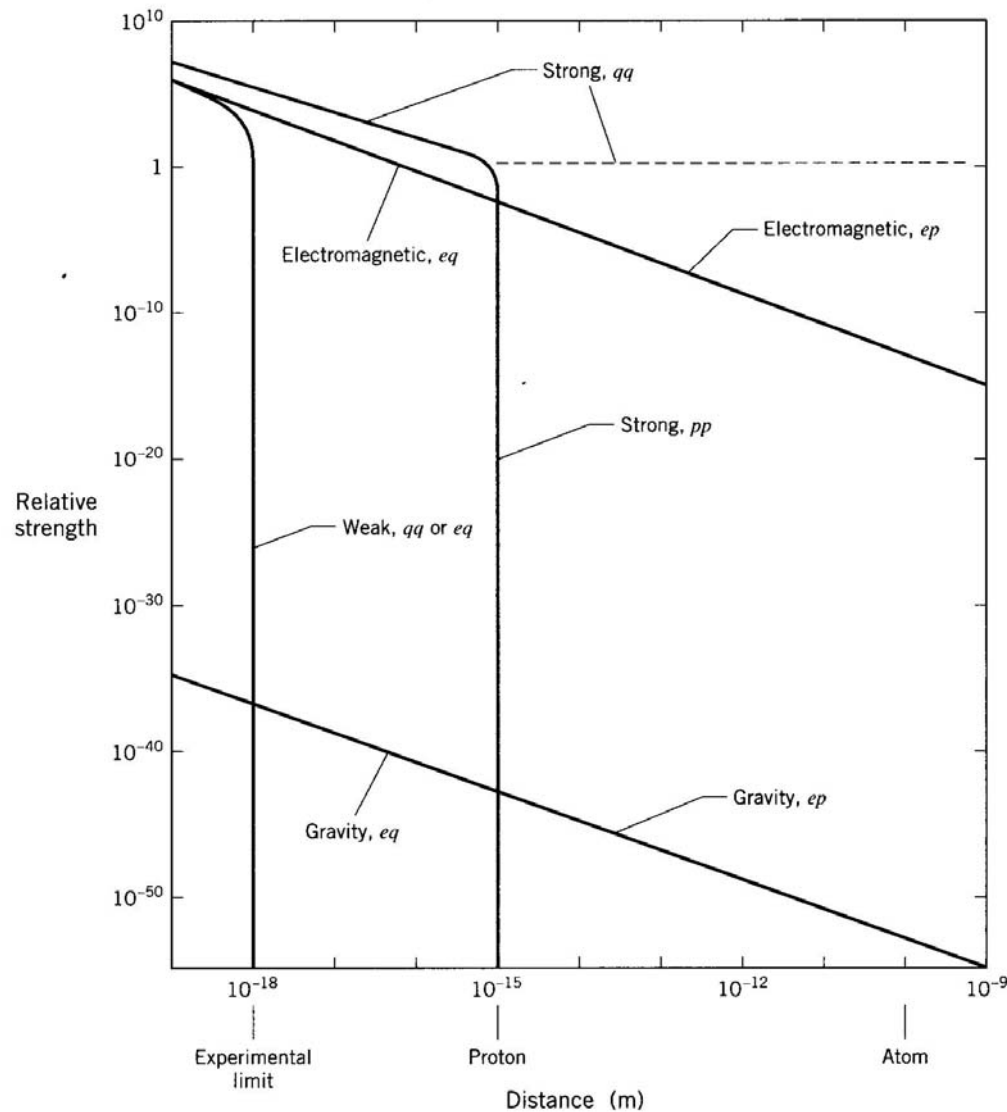


FIGURE 1-19 Strength of the four forces as a function of distance.

At atomic distances there are only two forces, electromagnetism and gravity, and the electromagnetic force between a proton and electron is about 40 orders of magnitude greater than gravity. The force between two quarks, if they could be separated, would be enormous, as shown by the dashed line. At a distance equal to the proton size, the strong force turns on abruptly to a strength about 100 times the electromagnetic force. (The strong force does not affect the electron at all.) At a distance equal to about 1/1000 of the proton size, the weak force turns on abruptly. This is the limit of current experimentation.

2.2.4. Arbeit und Energie

Def.: Bei Verschiebung verrichtete **Arbeit** =

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Vom Kraftfeld verrichtete Arbeit:

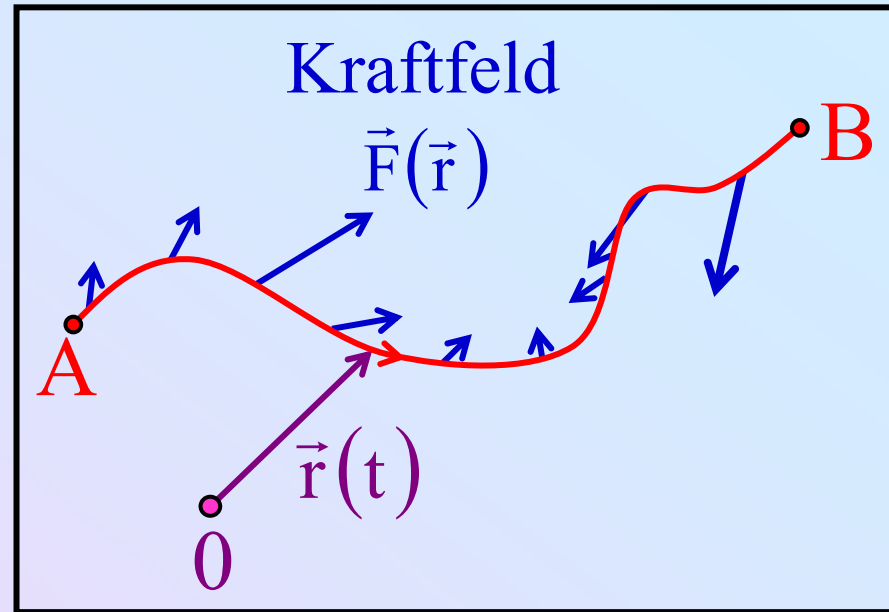
$$-dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$[W] = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-2} = 1 \text{ J (Joule)}$$

Def.: Bei Verschiebung aufgebrauchte **Leistung**

$$P = \frac{dW}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = 1 \text{ Js}^{-1} = 1 \text{ W (Watt)}$$

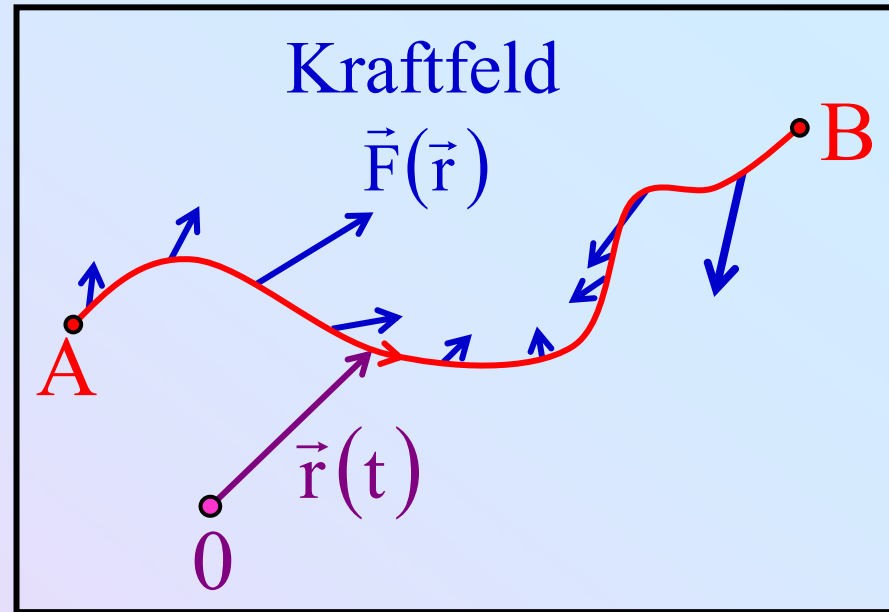


Arbeit \Rightarrow Bewegung

z.B. freie Bewegung im Kraftfeld:

$$-\Delta W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \Big|_A^B$$

(Beweis: \rightarrow Tafelrechnung)



\rightarrow Definition der kinetische Energie T eines Massepunktes

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

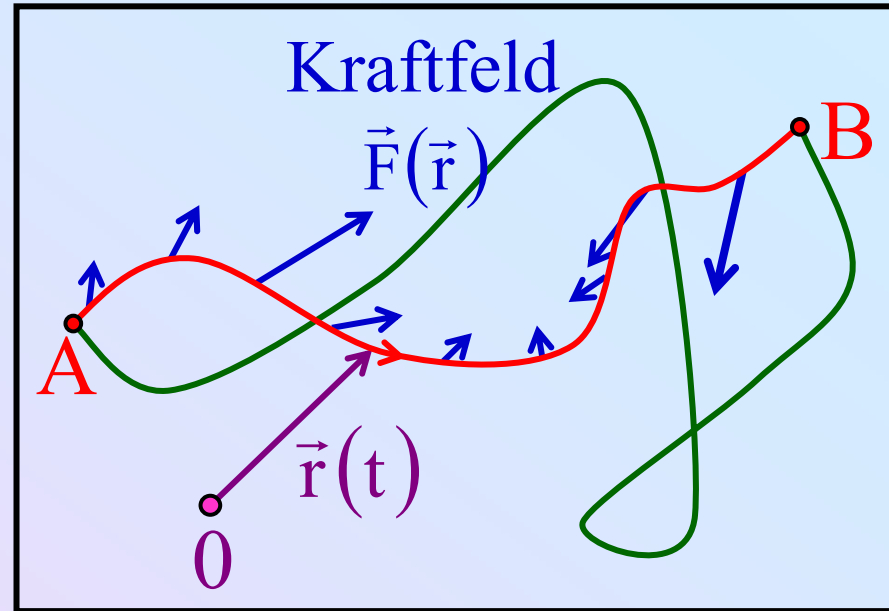
$$[T] = 1 \text{ J}$$

(manchmal alternative Benennung $T \equiv E_{\text{kin}}$)

Def.: Kraftfeld konservativ
 \Leftrightarrow es gibt Stammfunktion V :

$$\vec{F} = -\text{grad} V \equiv -\vec{\nabla} V$$

V heißt Potential des Feldes



Es gilt (vgl. Theorie-VL):

• \exists Potential $V \Leftrightarrow \Delta W_{A \rightarrow B}$ ist **wegunabhängig** \Leftrightarrow

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

• \exists Potential $V \Rightarrow$

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

(“ \Leftarrow ” gilt nur für hinreichend glatte Felder in einfach zusammenhängenden Gebieten)

Def.: **Potentielle Energie** eines Massenpunktes (bzgl. \vec{r}_0) im konservativen Kraftfeld:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \quad \leftarrow \quad \boxed{V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}'} \quad \text{skalares Feld}$$

Def.: **Äquipotentialflächen** = Flächen mit $V = \text{const.}$

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \delta V = \delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla}V \quad \text{für} \quad \delta \vec{r} \rightarrow \vec{0}$$

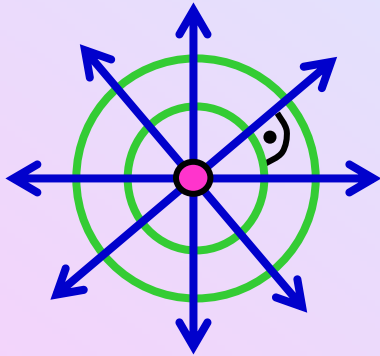
Folgerung: $\delta \vec{r}$ in Äquipotentialfläche $\Rightarrow V = \text{const.}$

$$\Rightarrow \delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\vec{F} = \vec{\nabla}V \perp \delta \vec{r}}$$

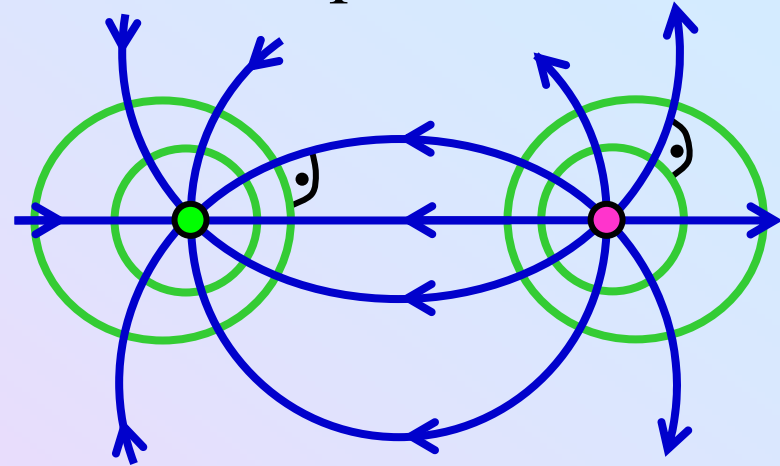
- Feldlinien stehen senkrecht auf Äquipotentialflächen
- Bewegung in Äquipotentialflächen $\Rightarrow \Delta W = 0$
- Verschiedene Äquipotentialflächen sind diskunkt

Beispiele:

Radialfeld

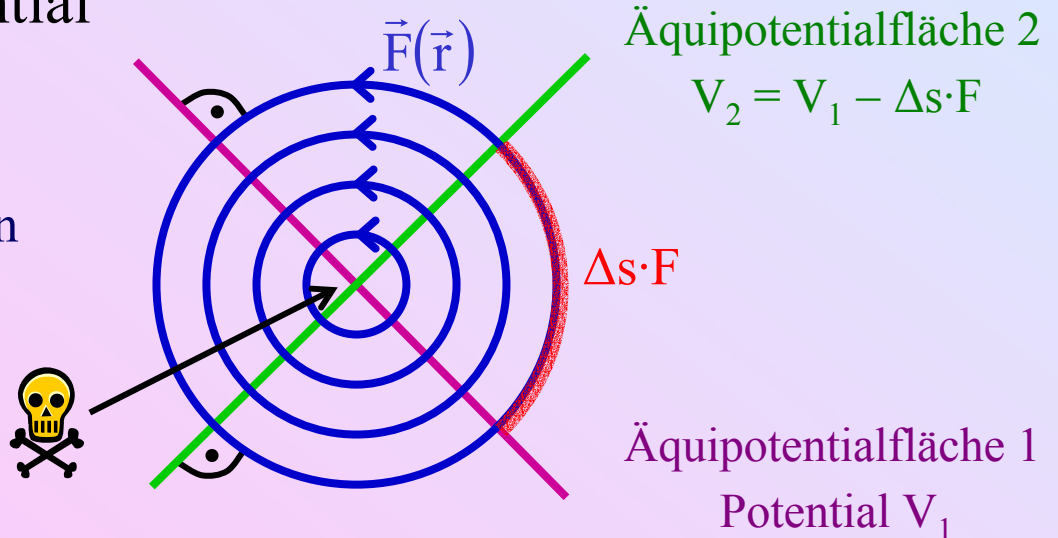


Dipolfeld



Wirbelfeld hat kein Potential

Beweis: 2 Äquipotentialflächen
($V_1 \neq V_2$) berühren sich nicht !

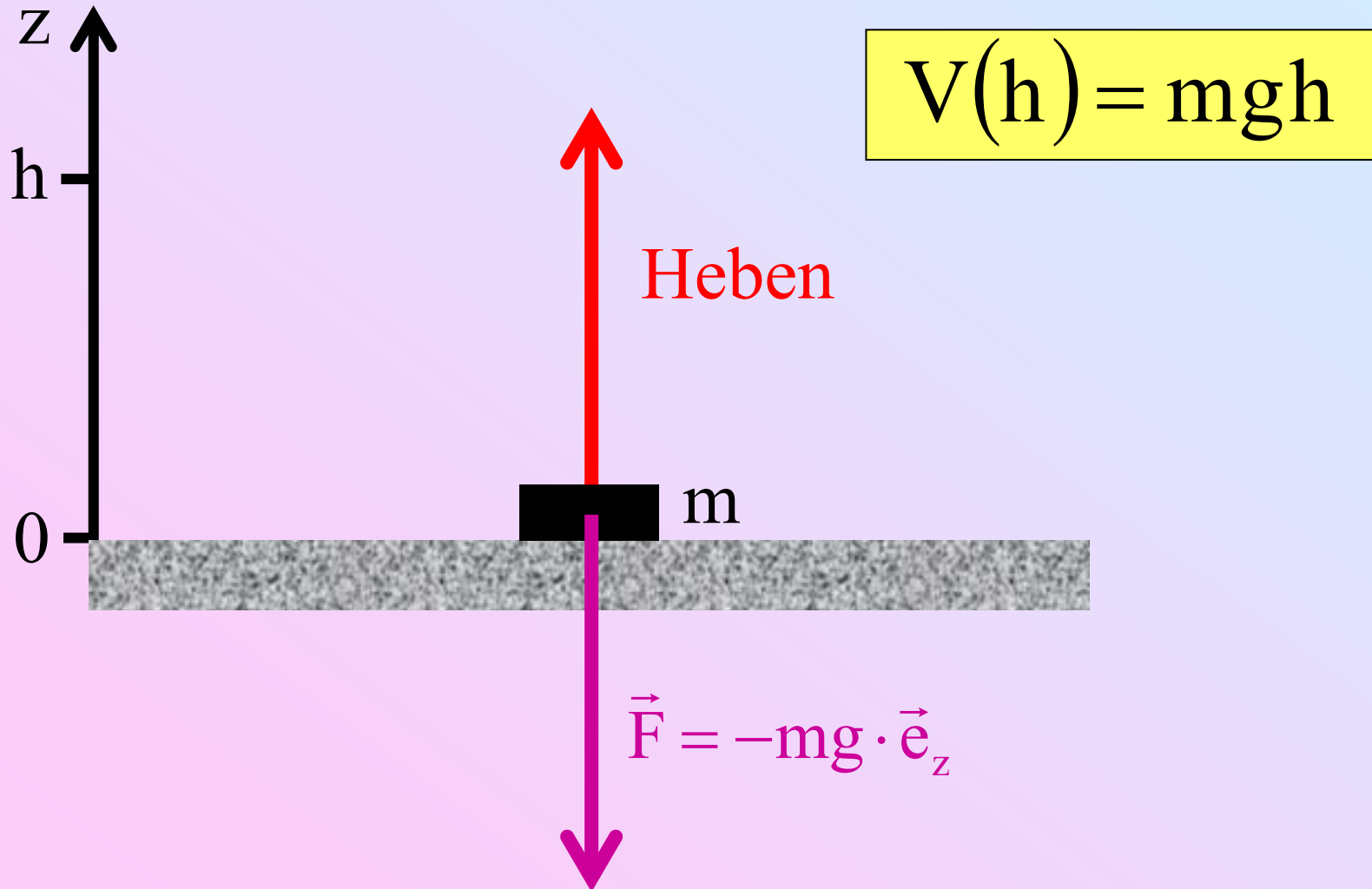


Äquipotentialfläche 2
 $V_2 = V_1 - \Delta s \cdot F$

Äquipotentialfläche 1
Potential V_1

Beispiele für potentielle Energie:

a) Heben von Lasten: → Tafelrechnung



b) Potentielle Energie der Feder:

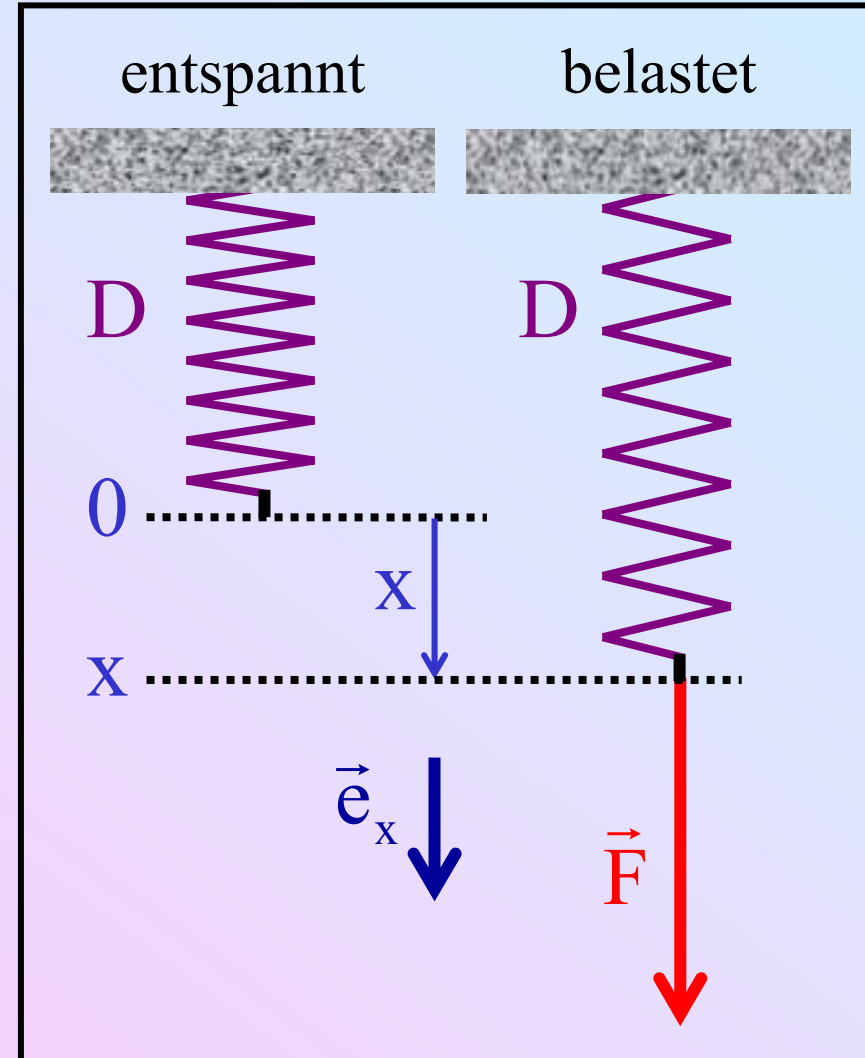
Hookesches Gesetz

$$F = D \cdot (x - x_0)$$

D = Federkonstante

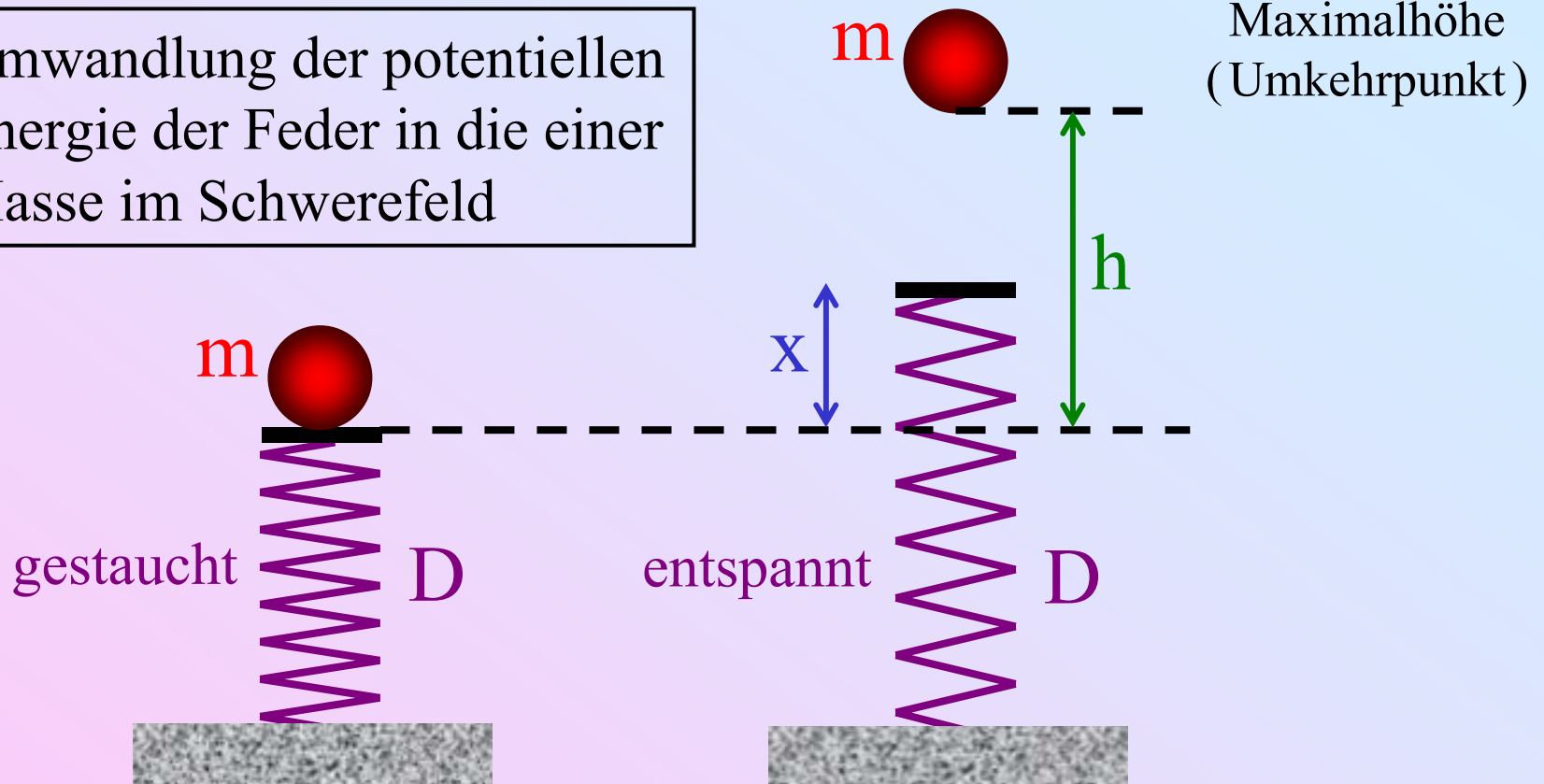
Tafelrechnung \Rightarrow

$$V(x) = \frac{1}{2} D x^2$$



Experiment:

Umwandlung der potentiellen Energie der Feder in die einer Masse im Schwerfeld

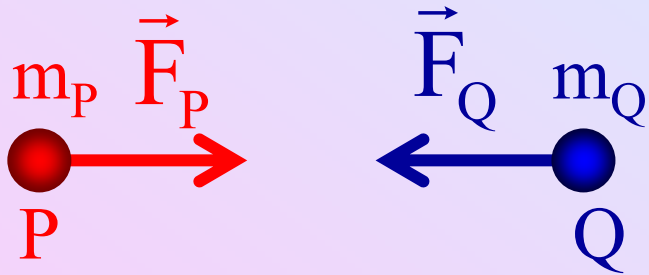


$$V = \frac{1}{2} D x^2 = mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{D}{2mg} \cdot x^2 \propto x^2$$

2.2.5. Erhaltungsgrößen

a) Impulserhaltungssatz



$$3. \text{ Axiom} \Rightarrow \vec{F}_P + \vec{F}_Q = \vec{0}$$

$$2. \text{ Axiom} \Rightarrow \dot{\vec{p}}_P + \dot{\vec{p}}_Q = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_P + \vec{p}_Q = \text{const.}$$

Verallgemeinerung: Wirken in einem System von Massenpunkten keine äußeren Kräfte (abgeschlossenes System), gilt

$$\text{Impulserhaltung: } \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const.}$$

Bemerkung: Es ist irrelevant, ob die inneren Kräfte konservativ sind oder nicht!

Definition: Schwerpunkt =

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

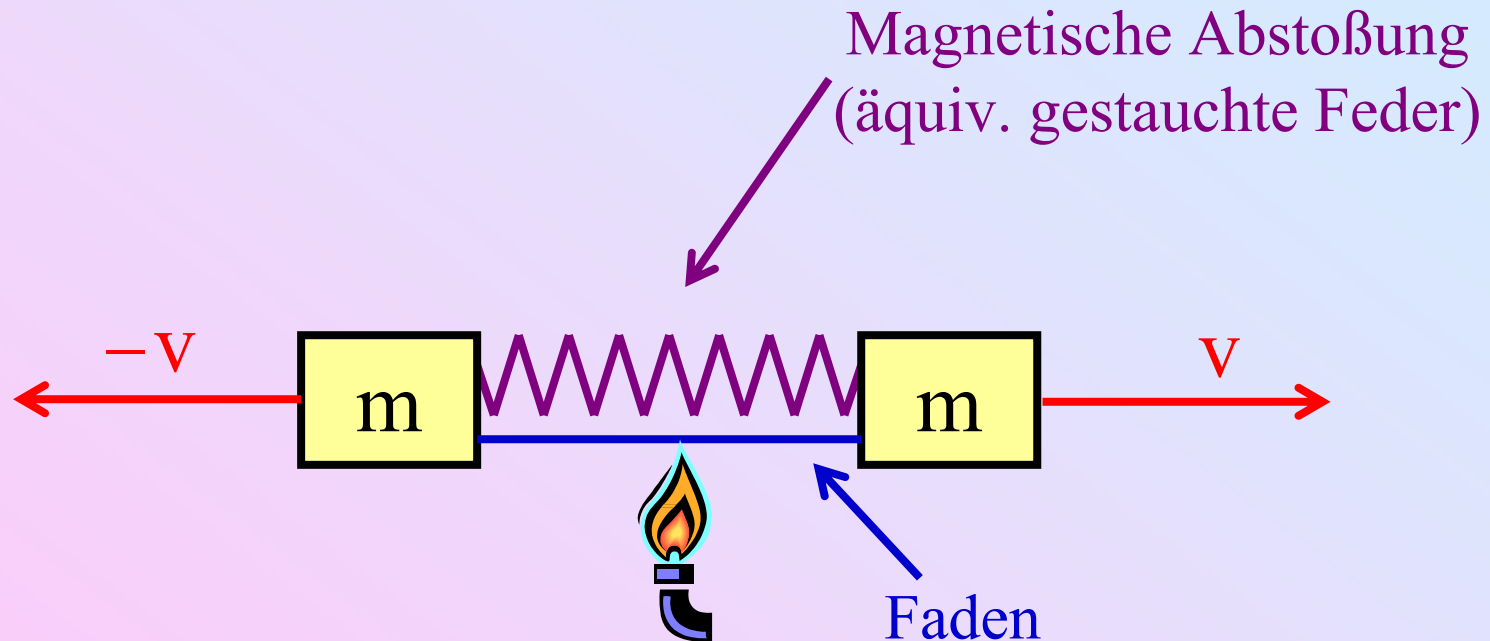
Gesamtmasse

Folgerung: $M \dot{\vec{r}}_S = \vec{p}_S = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{p}_i = \text{const.}$

Schwerpunktimpuls

Schwerpunktsatz: Für ein abgeschlossenes System ist der Schwerpunktimpuls konstant.

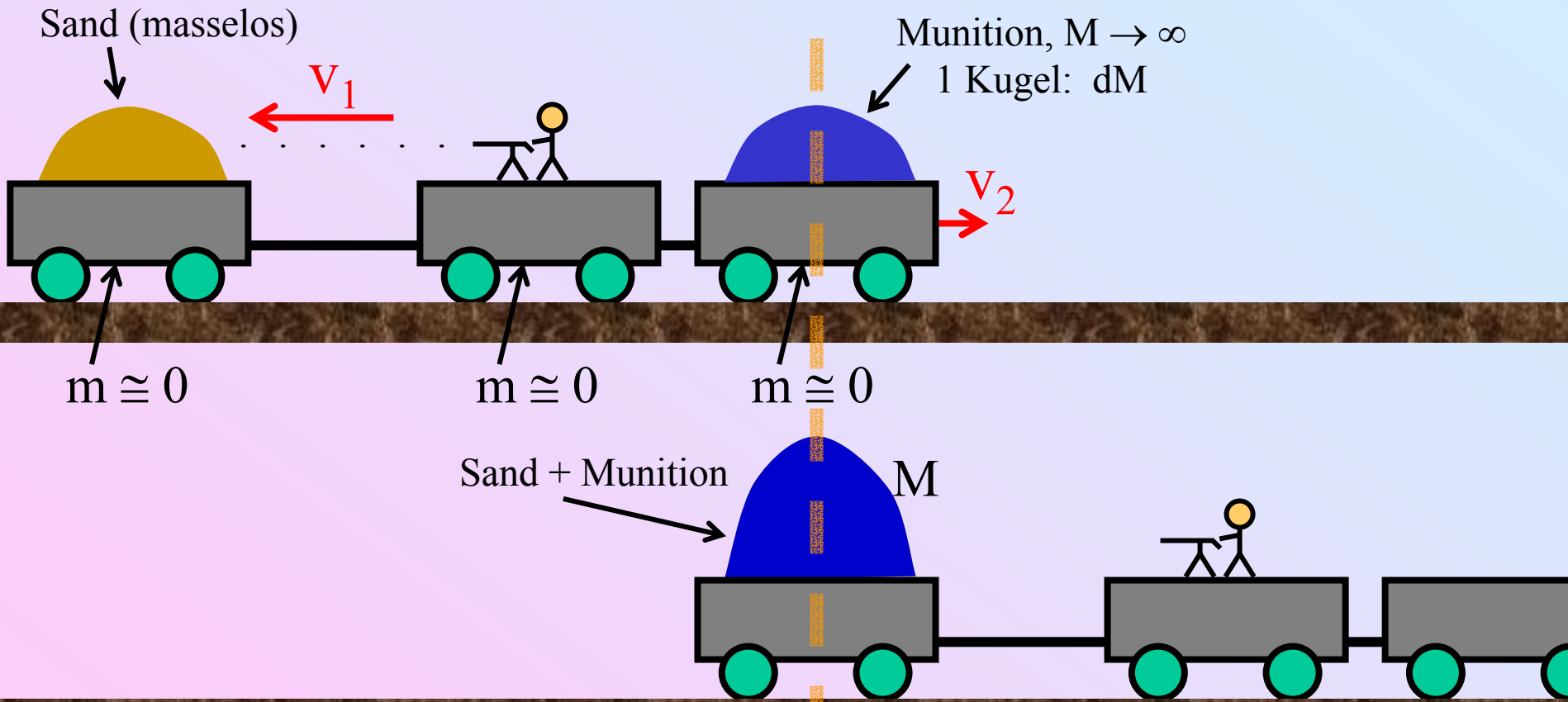
Demo-Versuch: Luftkissenbahn



→ der Schwerpunkt bleibt in Ruhe!

Gedankenexperiment zum Schwerpunktsatz:

Wie weit kann man mit diesem Rückstoßantrieb fahren?



Massenschwerpunkt
(zeitlich konstant)

b) Energieerhaltungssatz

Voraussetzung: **konservatives** Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

Tafelrechnung \rightarrow $E \equiv T + V = \text{const.}$ für Massenpunkt

Energiesatz der Mechanik: Bewegt sich ein Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld, ist die Energie (d.h. die Summe aus kinetischer und potentieller Energie) zeitlich konstant.

Verallgemeinerung: **System** von Massenpunkten \rightarrow

$$E \equiv \sum_i E_i = \sum_i (T_i + V_i) = \text{const.}$$

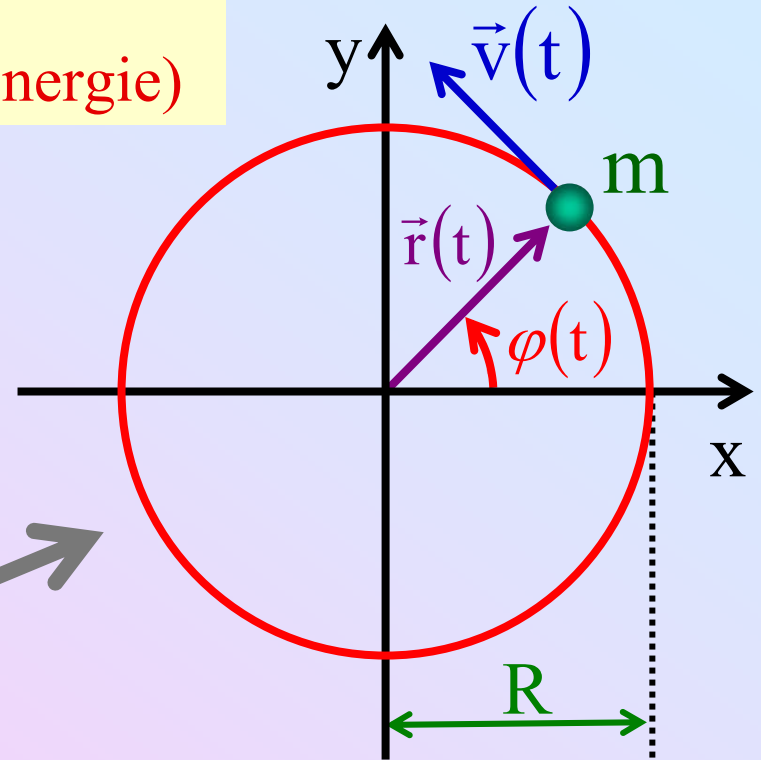
Verallgemeinerung: **Nicht-konservative (dissipative) Kräfte** (z.B. Reibung) führen zur Wärmebewegung (Energie Q) der Umgebung

$$T + V + Q = \text{const.}$$

Demo-Versuch: Looping

Idealisierende Annahmen:

- Keine Reibung (dissipative Kraft)
- Kugel rutscht (kein Rollen, keine Rollenergie)



$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}$$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$

Tafelrechnung \rightarrow

$$\vec{v}(t) = v(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \perp \vec{r}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{\parallel}(t) + \vec{a}_{\perp}(t)$$

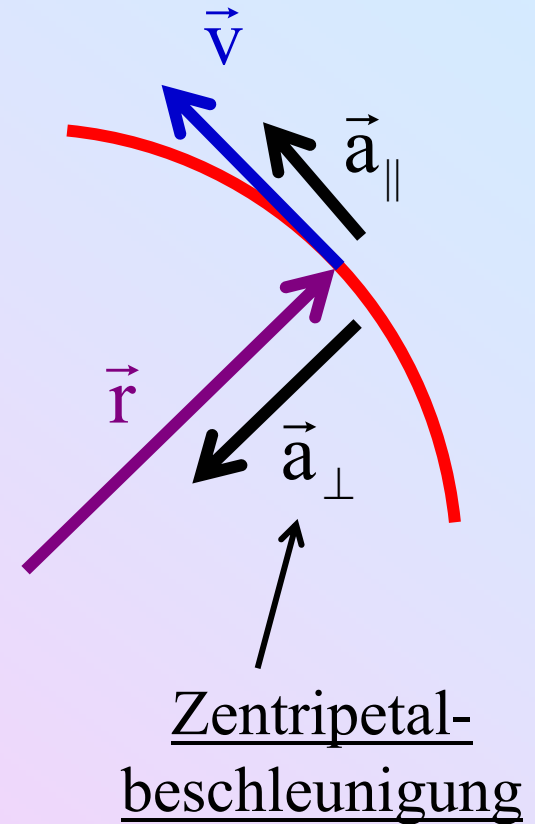
$$= a_{\parallel}(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} + a_{\perp}(t) \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit

$$v(t) = R \omega(t)$$

$$a_{\parallel}(t) = R \dot{\omega}(t) \quad a_{\perp}(t) = R \omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}$$



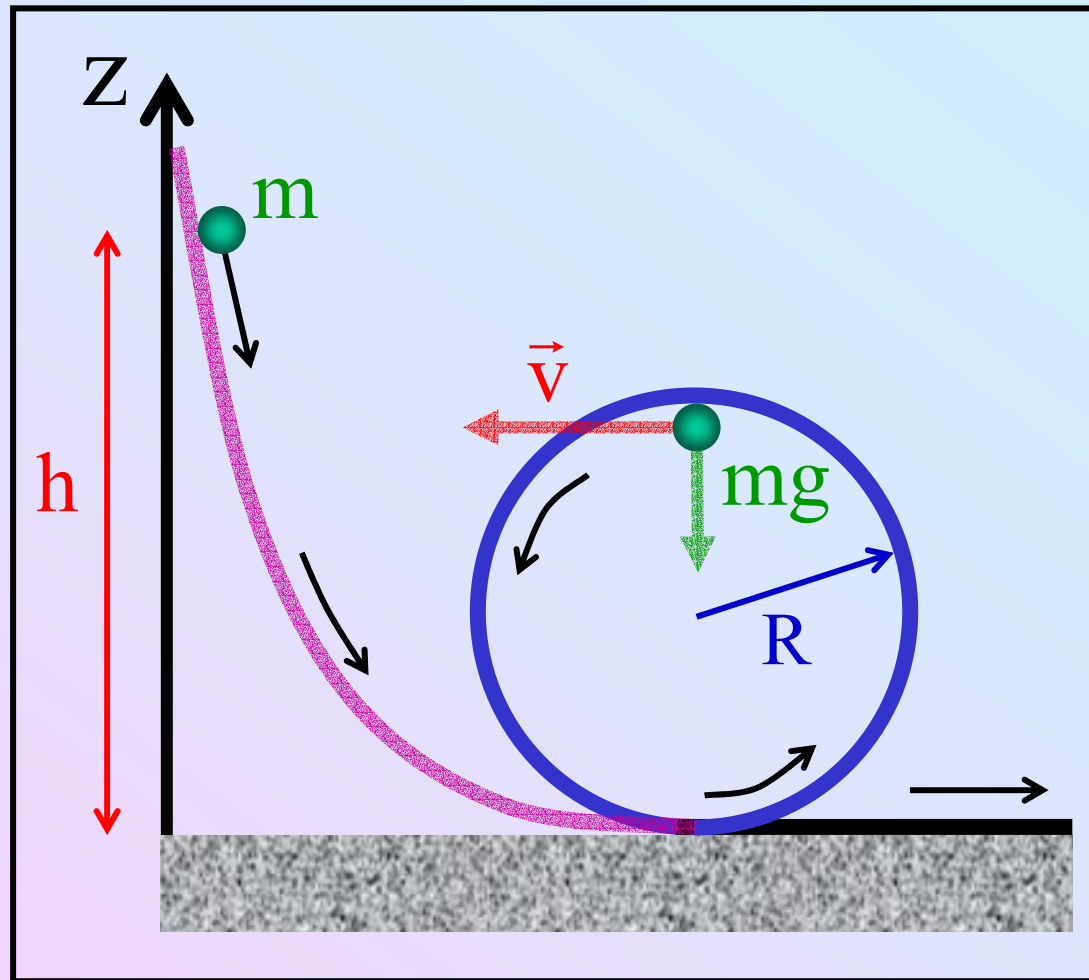
Bedingung für Looping-Bewegung (oberster Punkt der Bahn):

$$mg \leq m \frac{v^2}{R}$$

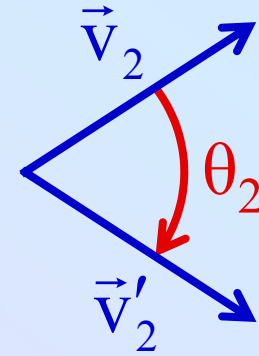
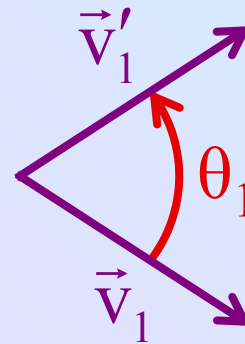
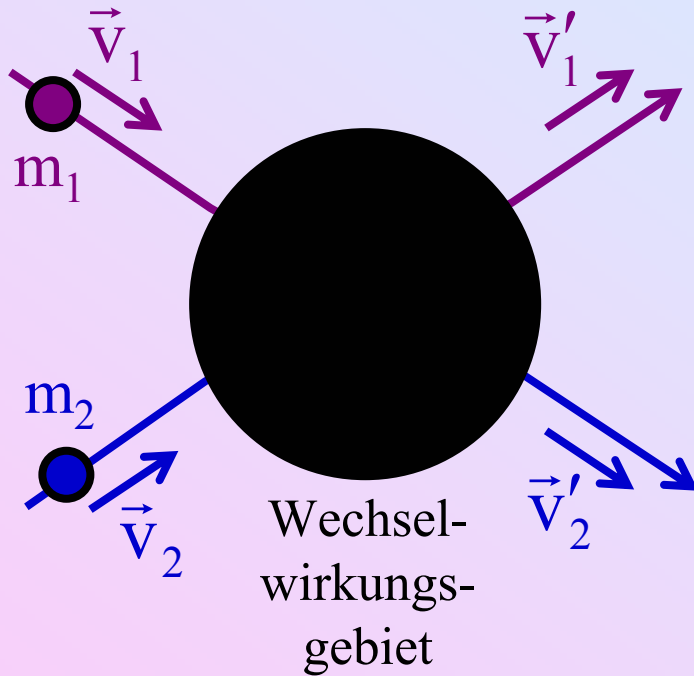
Schwerkraft \leq Zentripetalkraft

Tafelrechnung

$$h \geq \frac{5}{2} R$$



2.2.5. Stoßgesetze

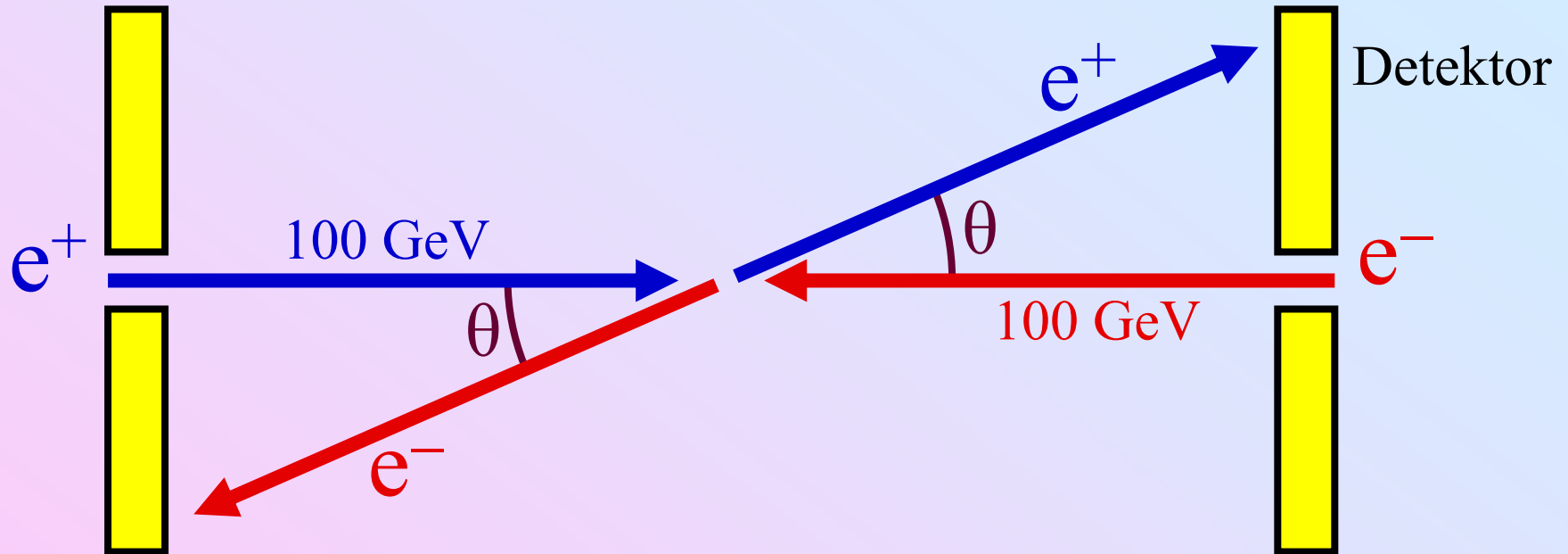


Streuwinkel

- Konservative Kräfte: **Elastischer Stoß** $\Sigma E_{\text{kin}} = \text{const}$
- Dissipative Kräfte: **Unelastischer Stoß** ΣE_{kin} nimmt ab
- Innere Anregung: **Superelastischer Stoß** ΣE_{kin} kann zunehmen

Billiard: Direkter Stoß des Laien \rightarrow ziemlich elastisch
Profistoß mit Drall \rightarrow superelastisch

Beispiel: Elastische Streuung von Elementarteilchen



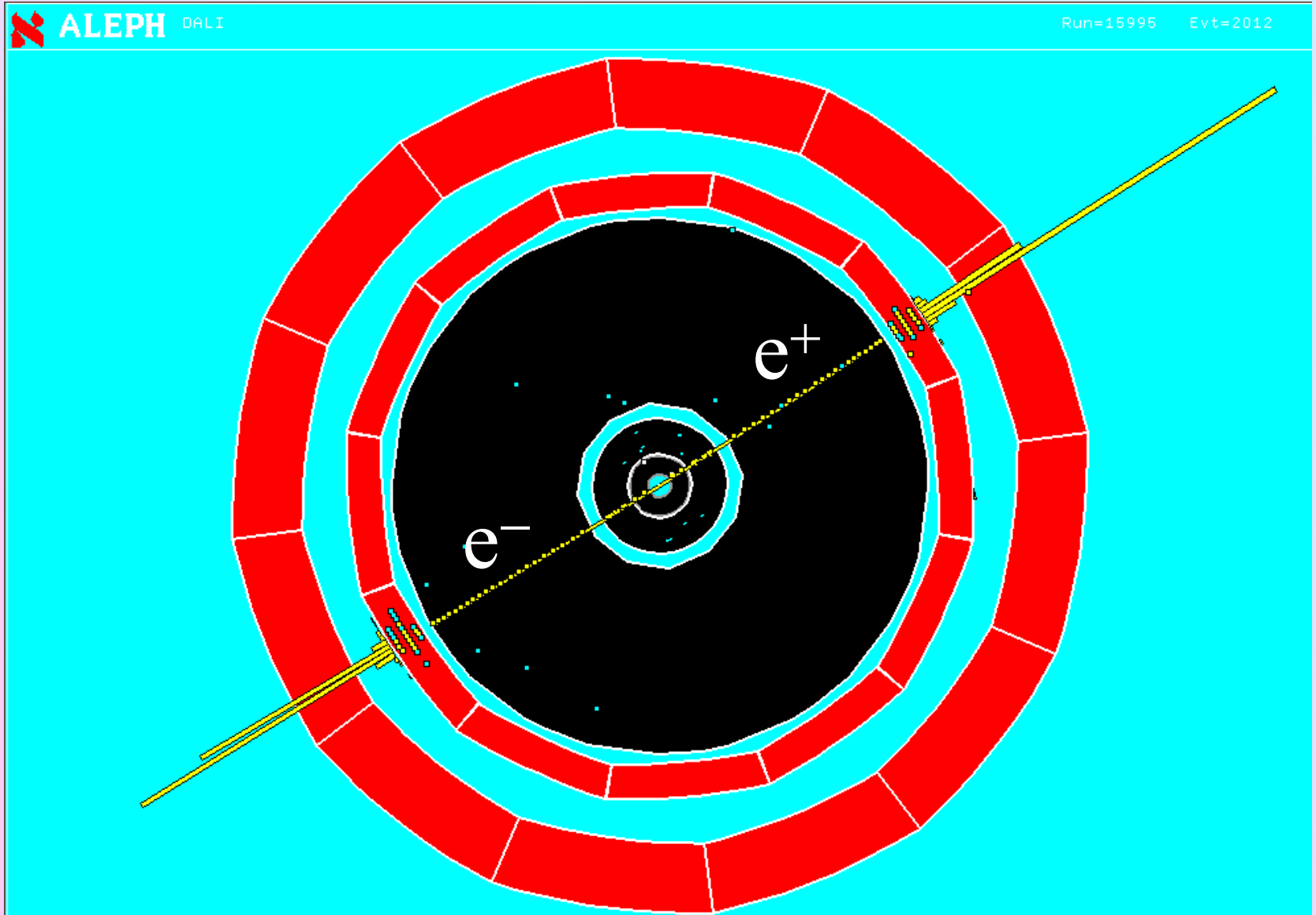
100 GeV \leftrightarrow 100 GigaVolt Beschleunigungsspannung

Experimentelle Charakterisierung der Kraft beim Stoß:

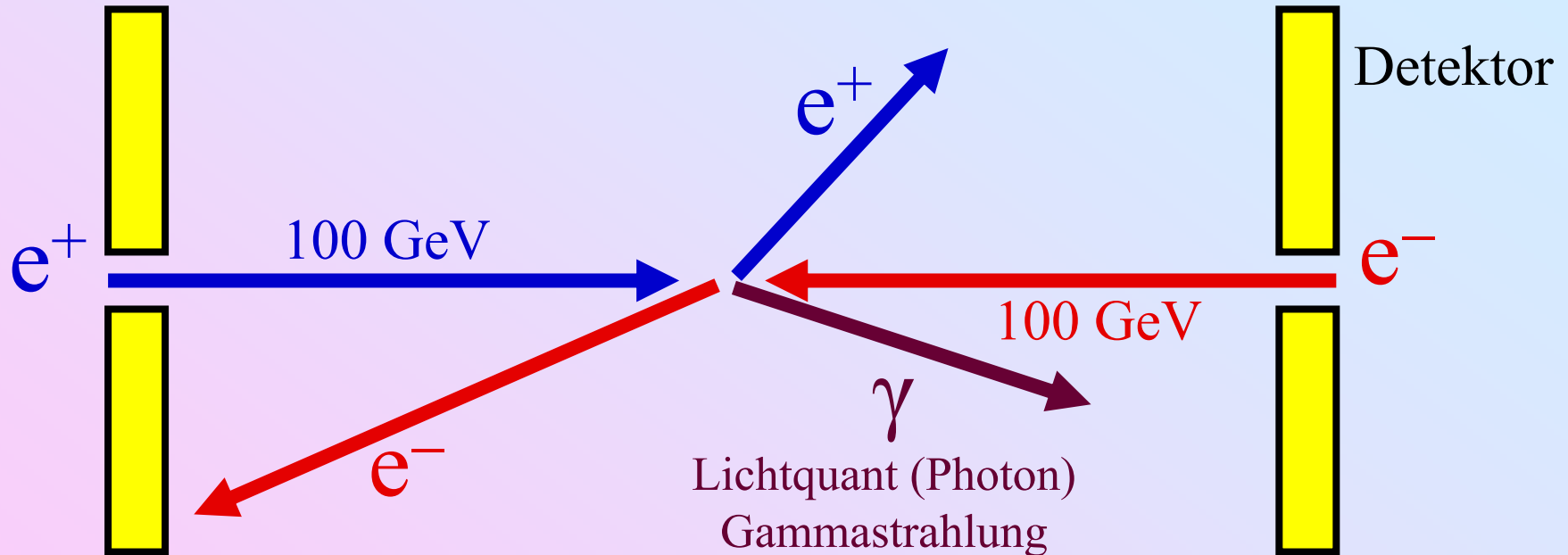
$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{dN}{d\cos\theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sin\theta} \frac{dN}{d\theta} \propto \sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Beispiel:

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$$



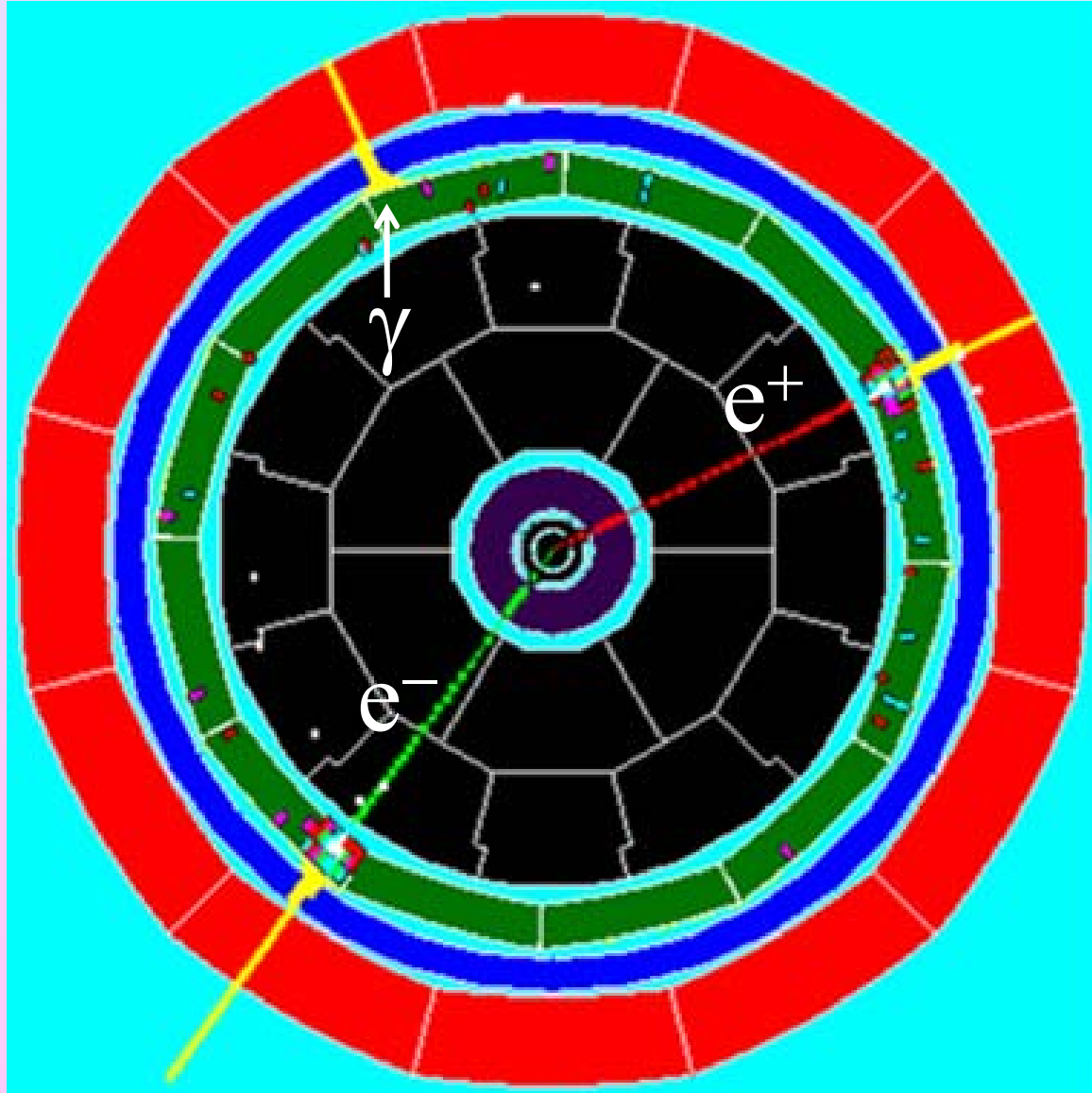
Beispiel: Unelastische Streuung von Elementarteilchen



Typischer **Detektor** für Elektronen und Photonen:
„**Kalorimeter**“ aus speziellen Kristallen

Teilchenenergie \Rightarrow sichtbares Licht \Rightarrow Photosensor

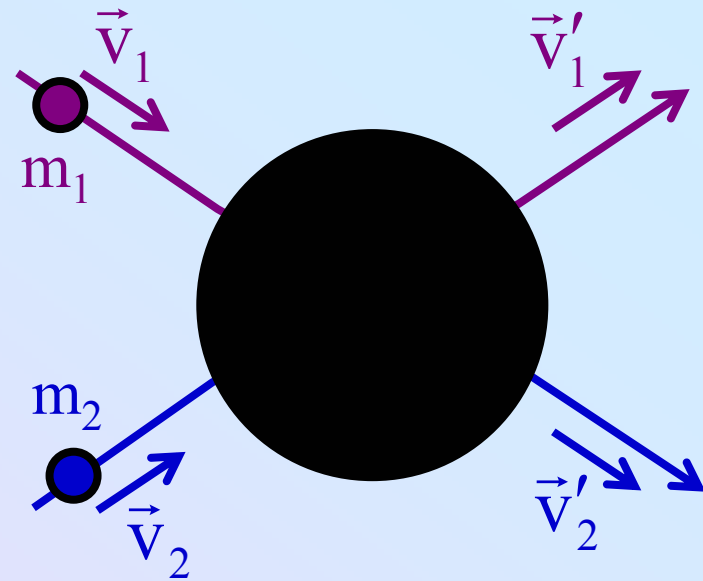
Beispiel: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$



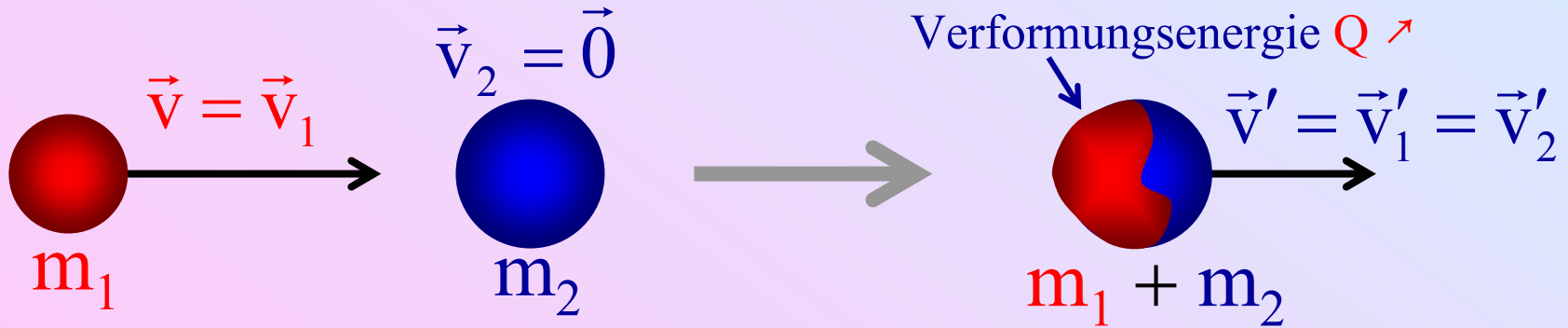
Impulserhaltung:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

(Stets gültig! Egal ob elastisch oder nicht)



Beispiel: total unelastischer Stoß

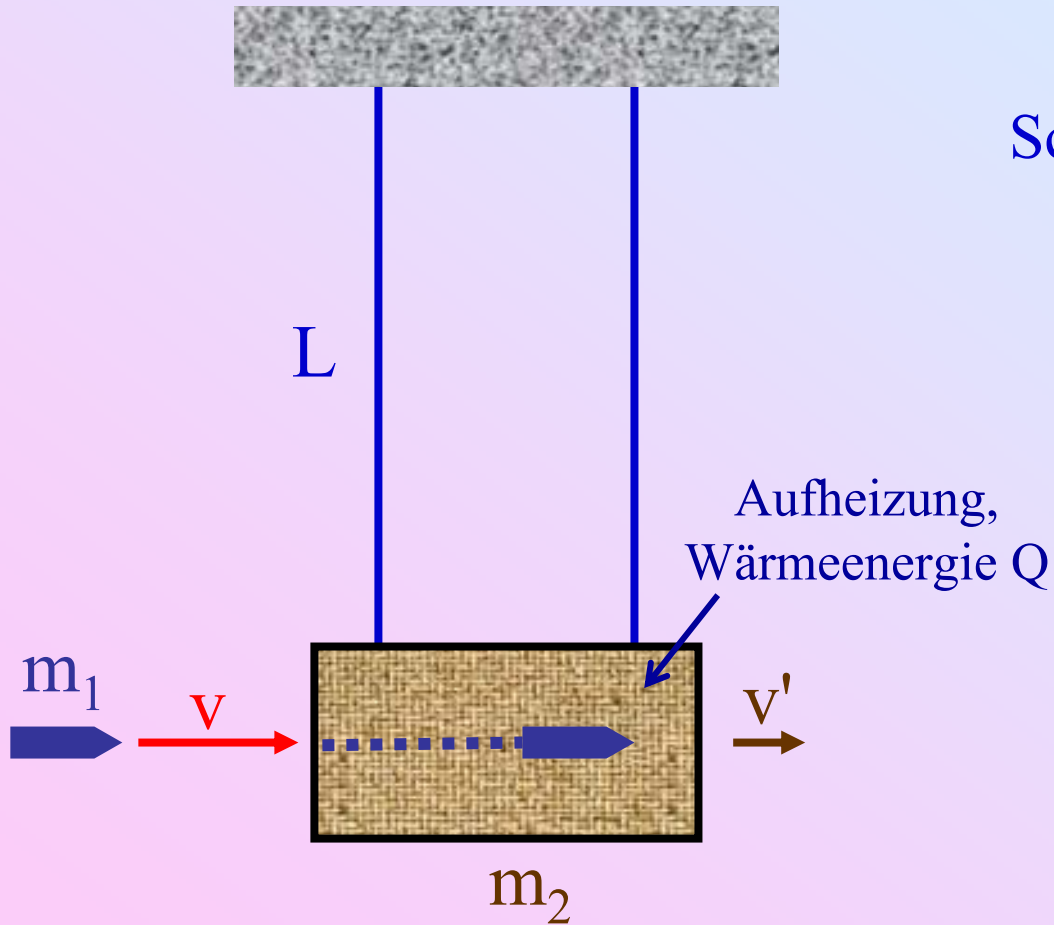


$$m_1 \vec{v} = (m_1 + m_2) \vec{v}'$$

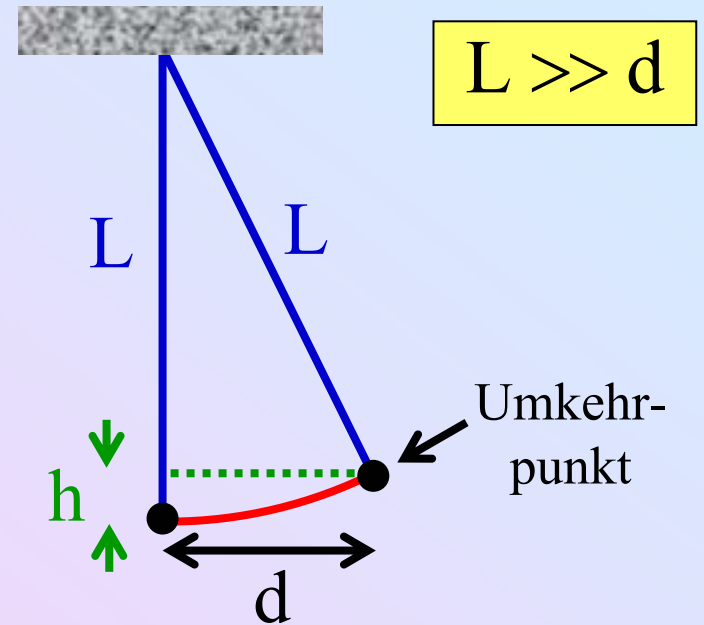
\Rightarrow

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v$$

Beispiel: Ballistisches Pendel



Schwerpunktsbewegung:



Messe d



Tafelrechnung

$$v \approx \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot d$$

$$Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2$$

Elastischer Stoß: $Q = 0$

Impulserhaltung...

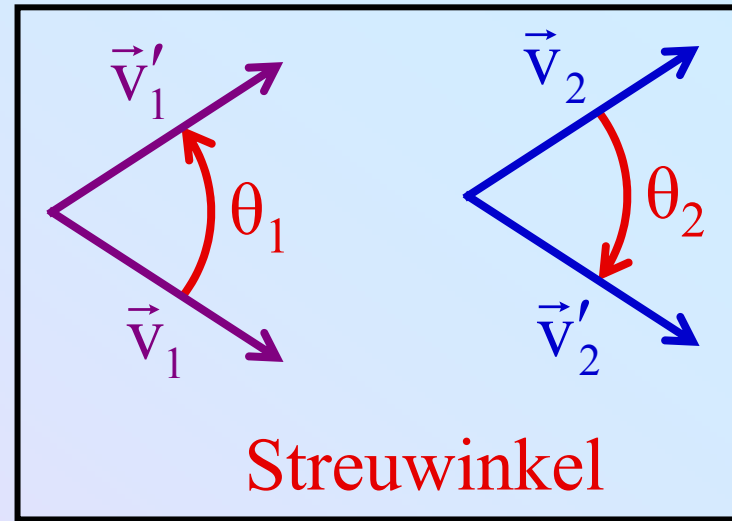
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

...und zusätzlich Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

\vec{v}'_1, \vec{v}'_2 → 6 Unbekannte
Impulserhaltung → 3 Gleichungen
Energieerhaltung → 1 Gleichung

} 2-dimensionale Lösungsschar
z.B. Parameter: θ_1, θ_2



Spezialfall: Elastischer Stoß im **Schwerpunktsystem** $\vec{p}_S = \vec{0}$

Impulserhaltung im Schwerpunktsystem:

$$m_1 \vec{v}_1^{(S)} + m_2 \vec{v}_2^{(S)} = m_1 \vec{v}'_1^{(S)} + m_2 \vec{v}'_2^{(S)} = \vec{p}_S = \vec{0}$$

\Downarrow

$$m_1 \vec{v}_1^{(S)} = -m_2 \vec{v}_2^{(S)}$$

$$m_1 \vec{v}'_1^{(S)} = -m_2 \vec{v}'_2^{(S)}$$

Energieerhaltung

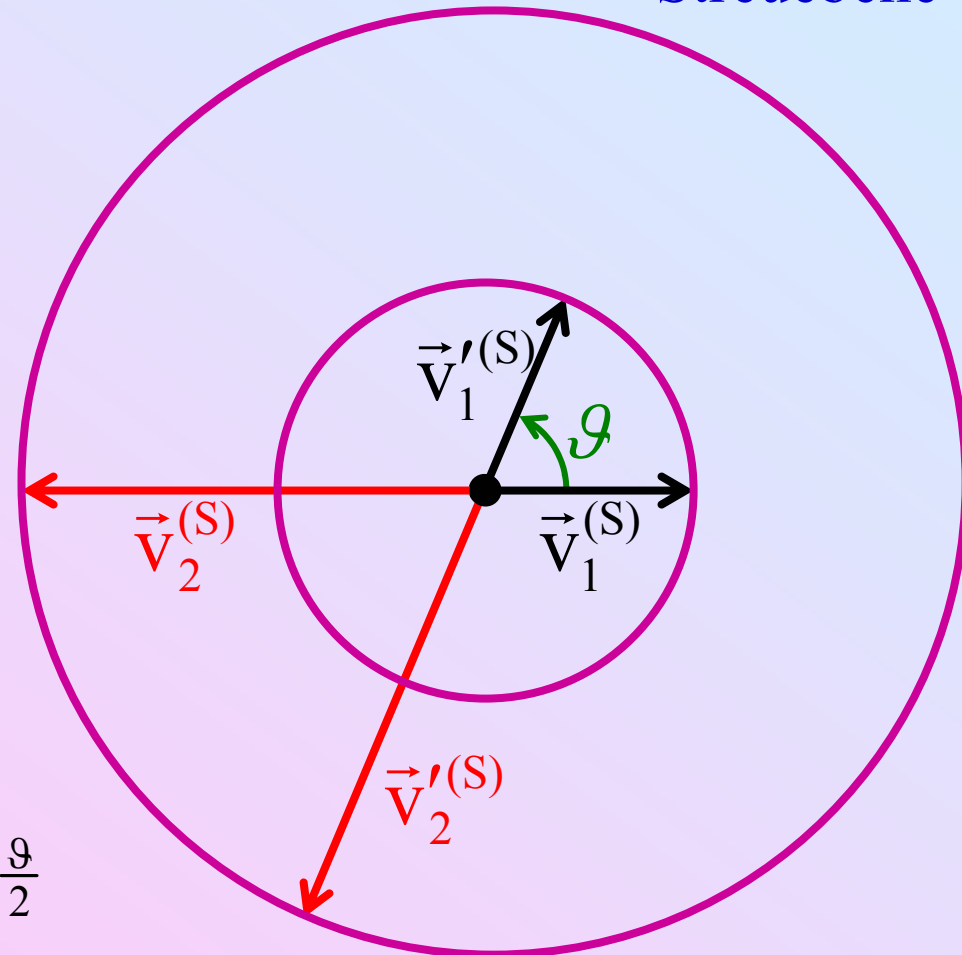
\Downarrow

$$|\vec{v}_1^{(S)}| = |\vec{v}'_1^{(S)}|, \quad |\vec{v}_2^{(S)}| = |\vec{v}'_2^{(S)}|$$

Impulsübertrag:

$$\Delta p = m_1 |\vec{v}'_1 - \vec{v}_1| = 2m_1 v_1 \sin \frac{\vartheta}{2}$$

Streuebene



Spezialfall: Elastischer Stoß im **Targetsystem**

$$\vec{v}_2 = \vec{0}$$

oft ruhend im Labor \rightarrow Laborsystem

Schwerpunktgeschwindigkeit:

$$\vec{v}_S = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$



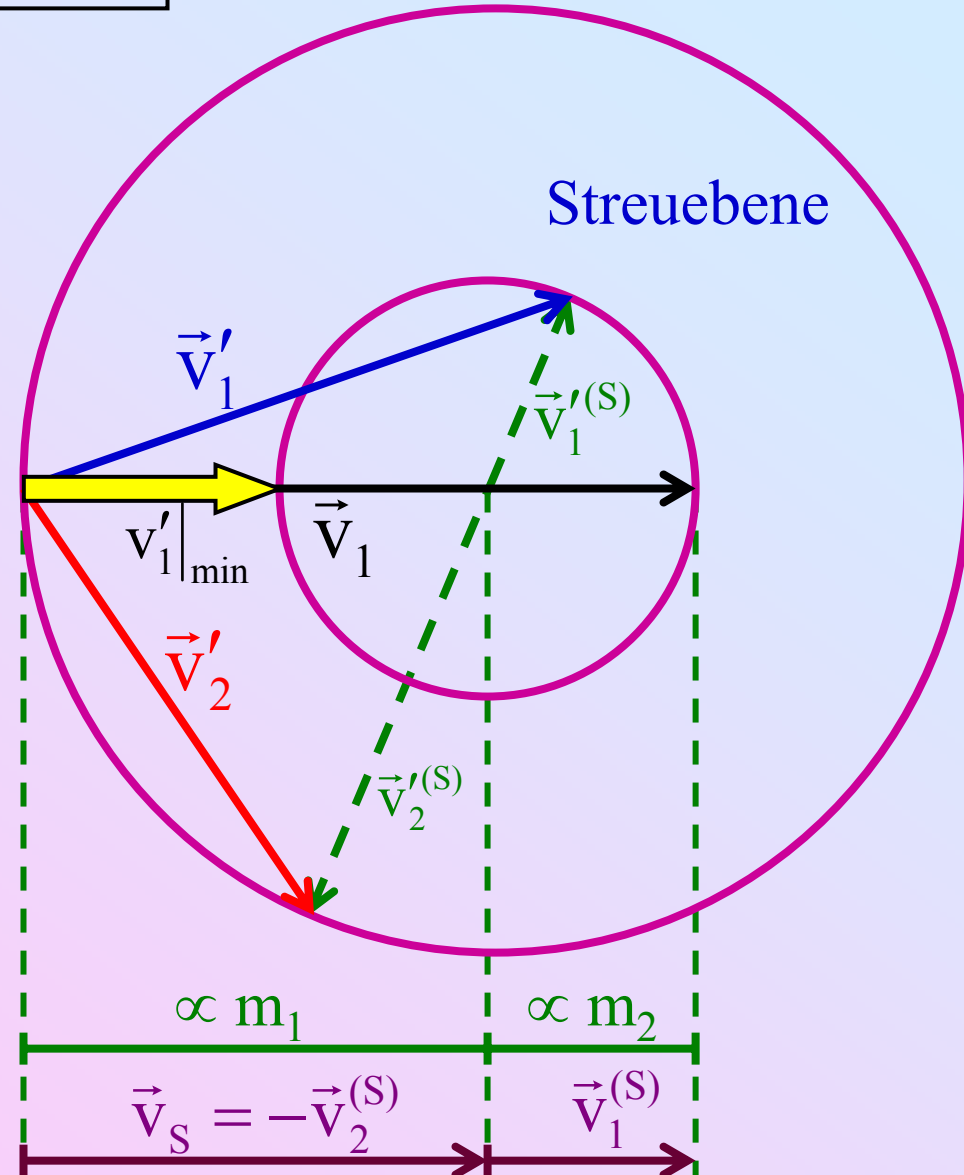
$$\vec{v}_1^{(S)} = \vec{v}_1 - \vec{v}_S = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2^{(S)} = \vec{0} - \vec{v}_S = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

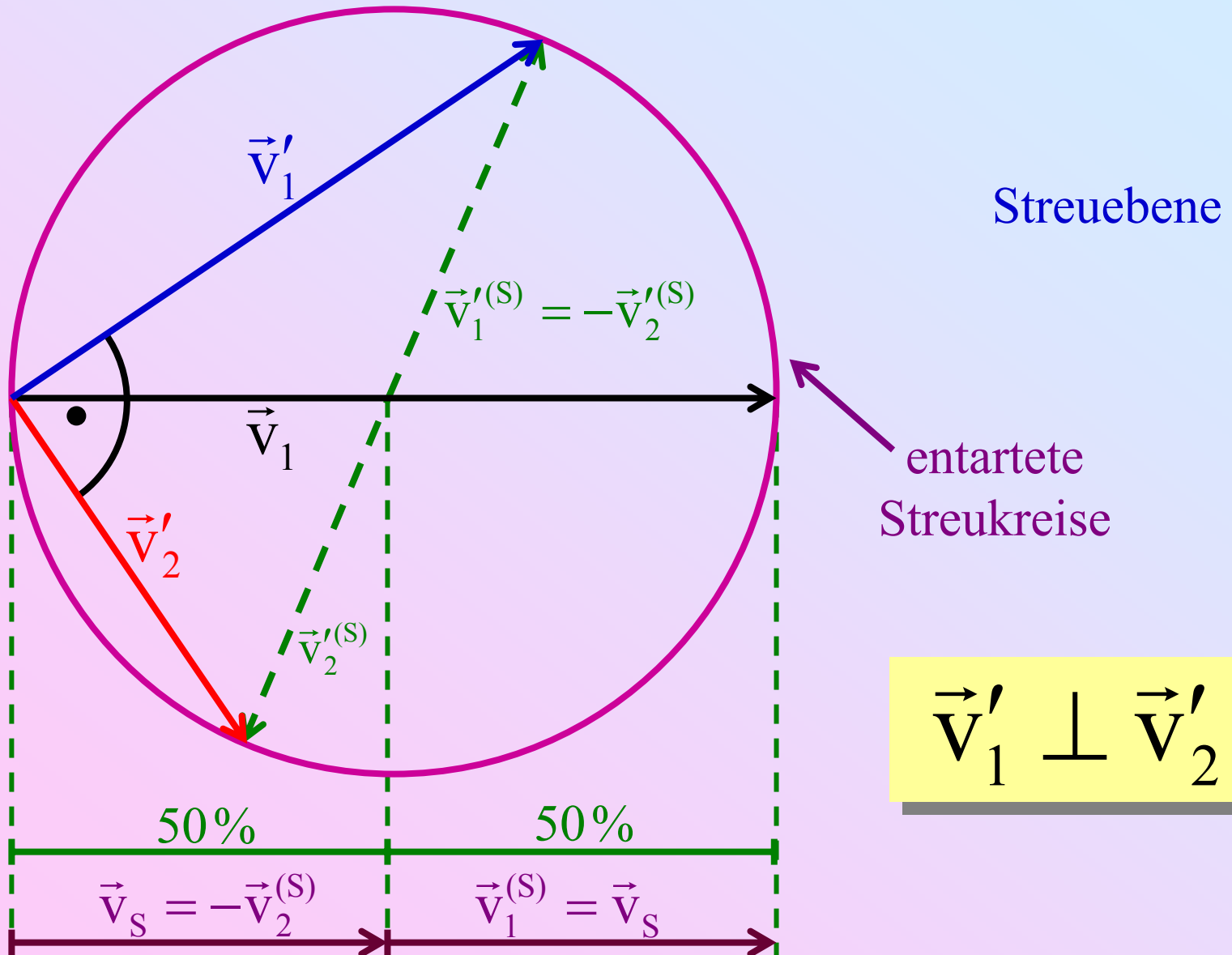
Folgerung: $|\vec{v}'_1|_{\min} = |\vec{v}_1| \cdot \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right|$

$\Rightarrow |\vec{v}'_1|_{\min} = 0$ falls $m_1 = m_2$

Anwendung: Neutronen-Abbremsung durch Moderator in Kernkraftwerken

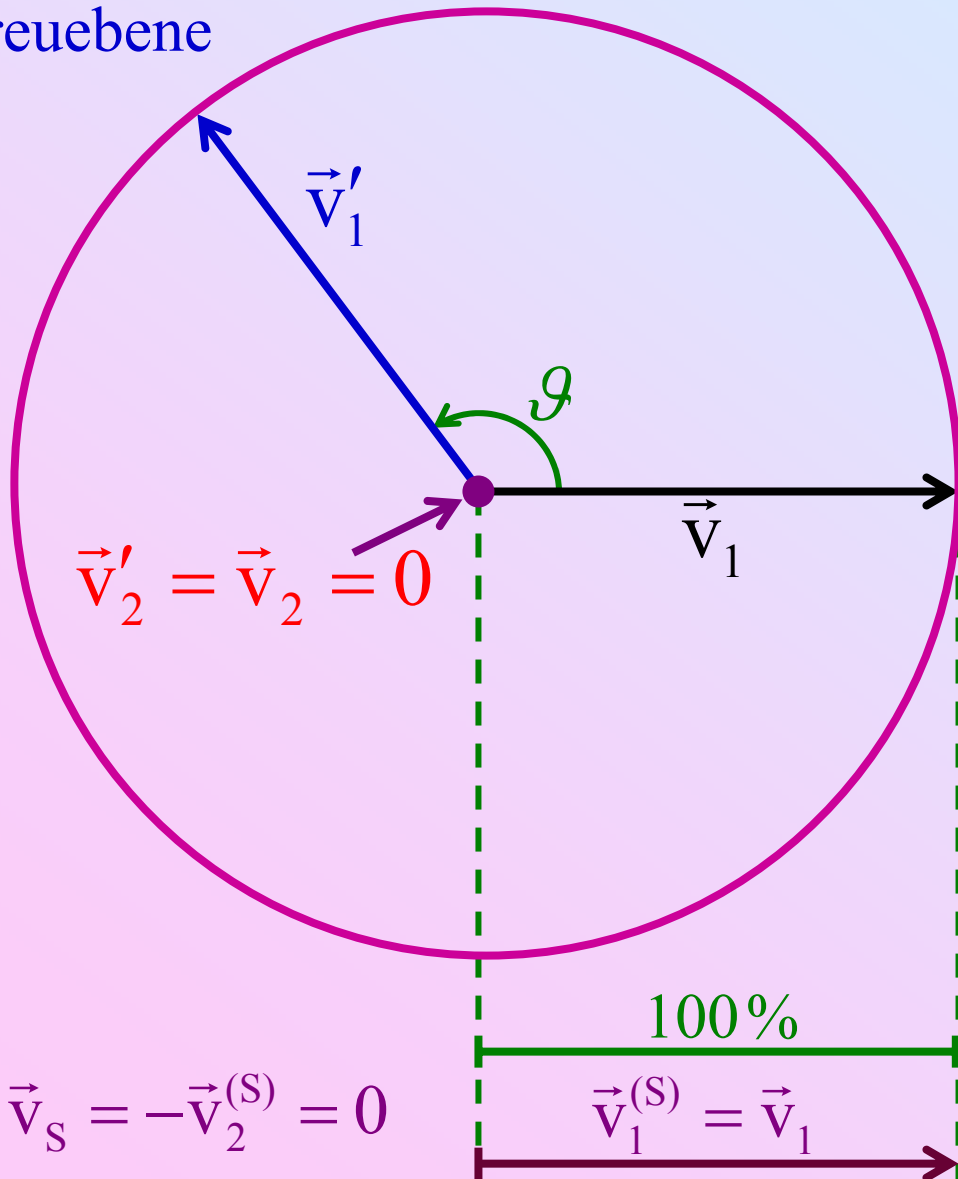


Spezialfall: Targetsystem, $m_1 = m_2$



Spezialfall: Targetsystem, $m_2 \rightarrow \infty$

Streuebene



$$|\vec{v}'_1| = |\vec{v}_1|$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 = 0$$

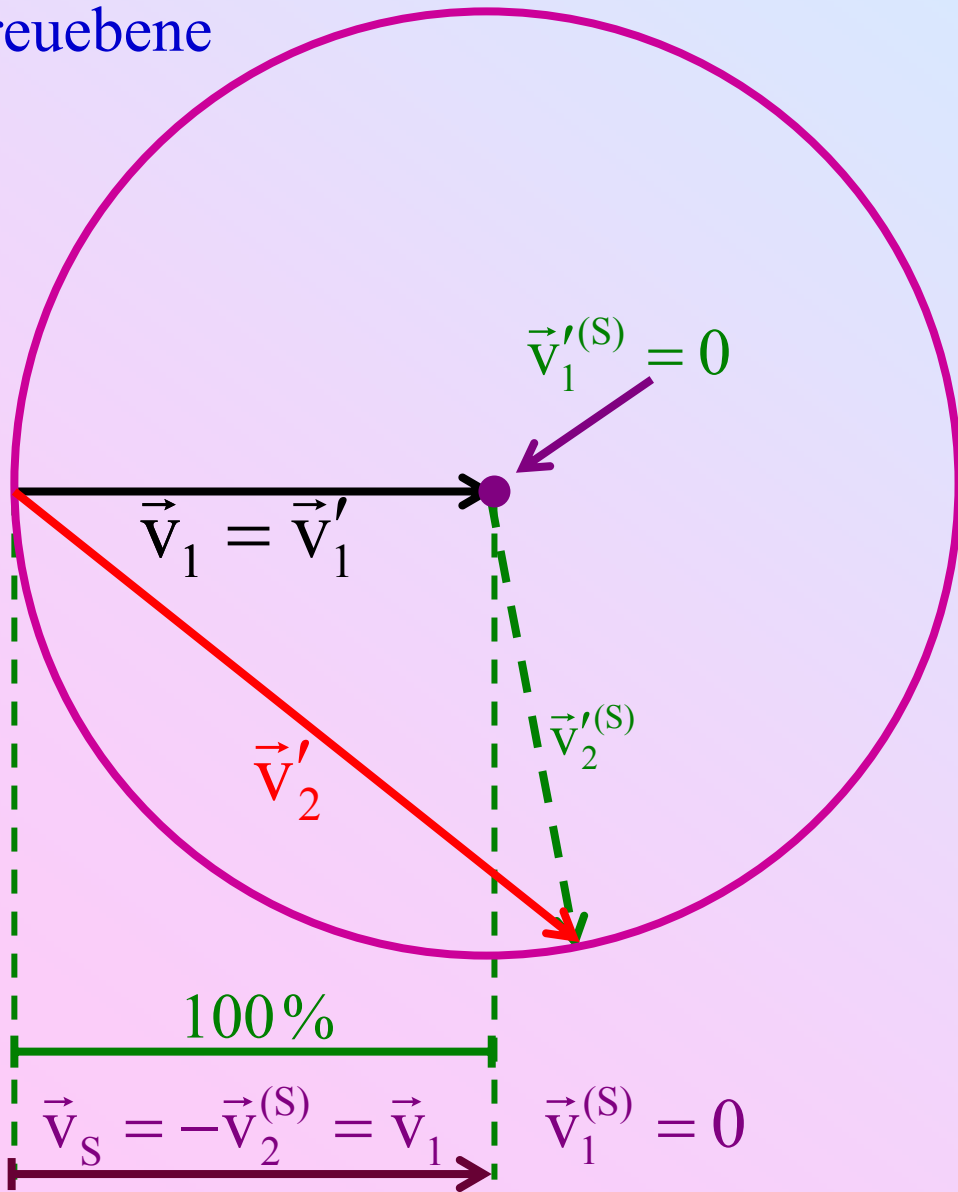
$$\Delta T = 0$$

$$\Delta p = 2m_1 v_1 \sin \frac{\vartheta}{2} \leq 2m_1 v_1$$

Streuung in alle
Richtungen

Spezialfall: Targetsystem, $m_1 \rightarrow \infty$

Streuebene



$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1$$
$$0 \leq |\vec{v}'_2| \leq 2 \cdot |\vec{v}_1|$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\Delta p = m_2 v_2'$$

Vorwärtsstreuung

Elastischer Stoß gegen eine ruhende ebene Wand:

$$\vec{v}_{\parallel} = \vec{v}'_{\parallel}$$

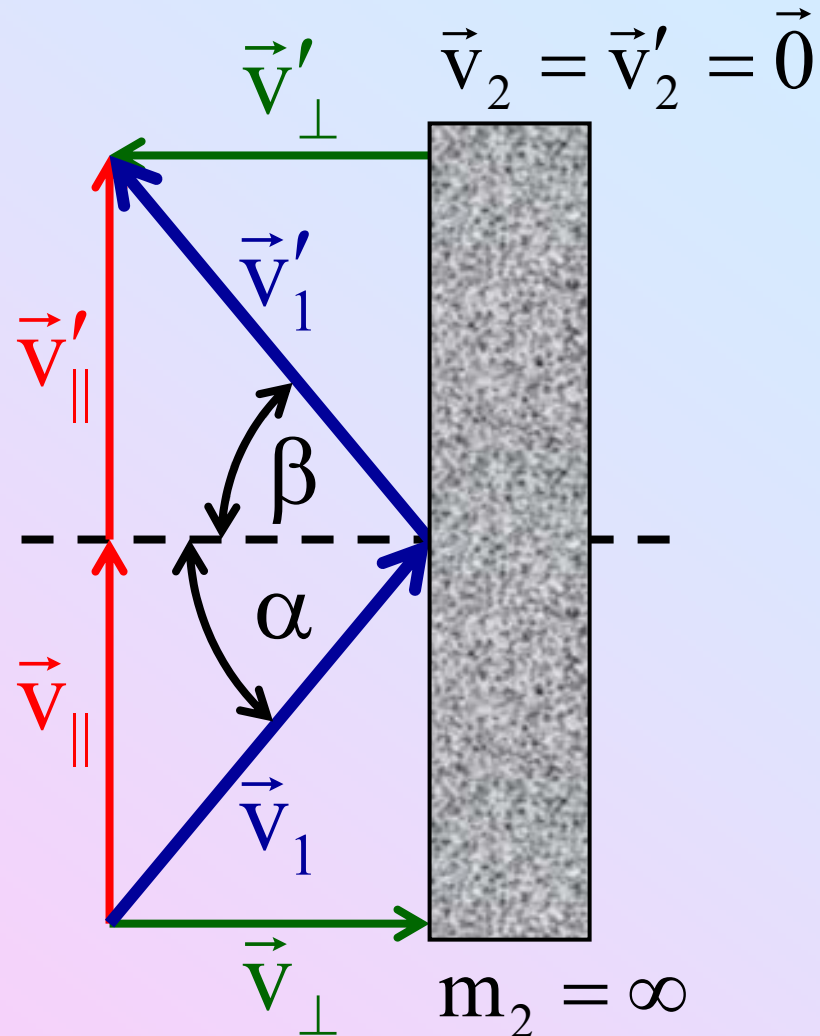
keine Kräfte
parallel zur Wand

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}'_1| \Rightarrow \vec{v}_{\perp} = -\vec{v}'_{\perp}$$

Folgerung: Reflexionsgesetz

Einfallswinkel α = Ausfallswinkel β

$$\Delta p = 2m_1 v_1 \cos \alpha \leq 2m_1 v_1$$
$$\Delta T = 0$$



2.2.6. Bewegung mit Reibung

Reibungsarten: **Haft-, Gleit-, Rollreibung**

Mikroskopische Theorie: **Oberflächen-Beschaffenheit**
(sehr kompliziert)

Kleine Körper in Flüssigkeiten und Gasen: **Stokes-Reibung**

Stokes-Reibung: $\vec{F}_R = -\alpha \vec{v}$ (empirischer Befund)

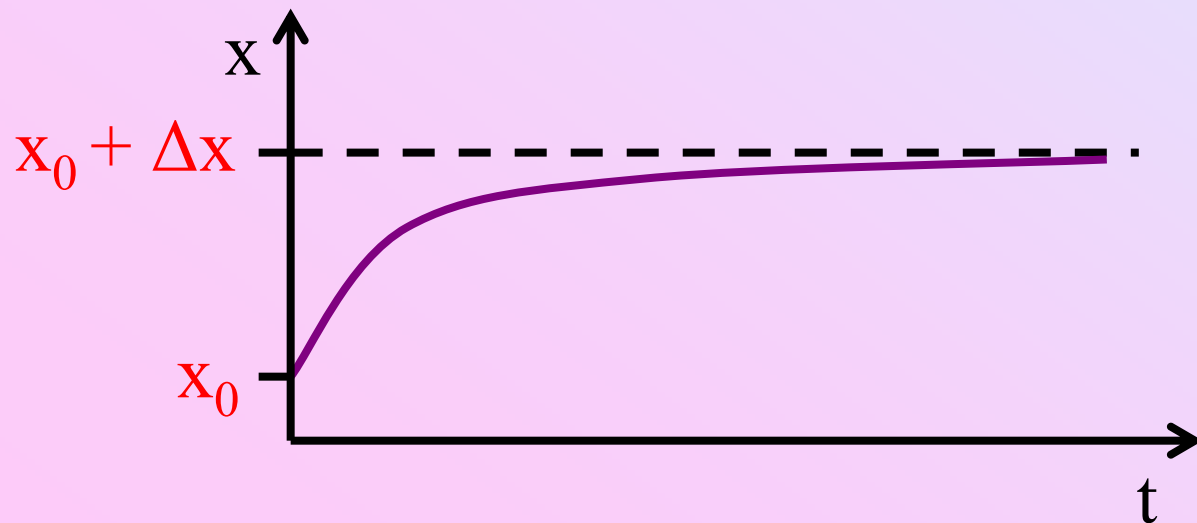
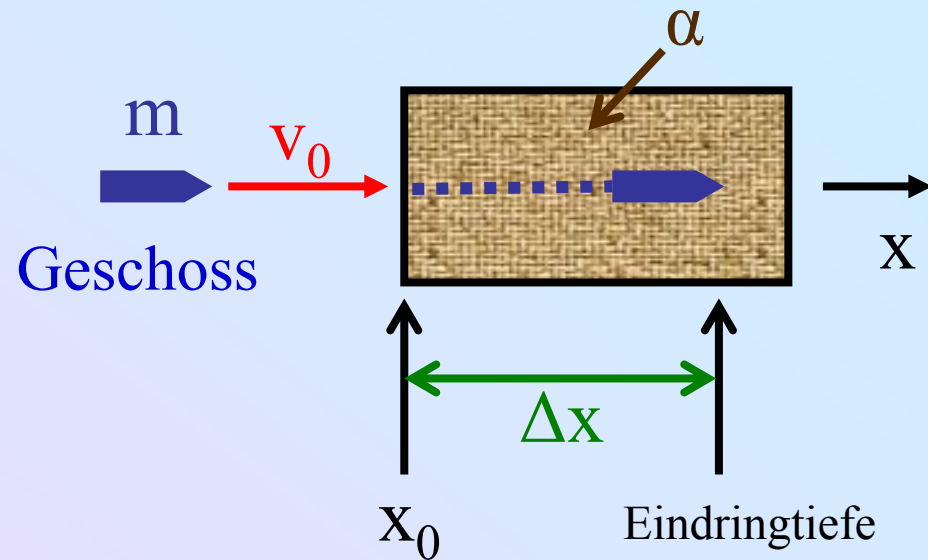
α = Reibungskoeffizient: $[\alpha] = \text{Nsm}^{-1}$

a) Freie Bewegung

$$m\dot{v} = F_R = -\alpha v$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau \\ &= x_0 + v_0 \frac{m}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)\right) \end{aligned}$$



Eindringtiefe:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t \rightarrow \infty) - x_0 \\ &= v_0 \cdot \frac{m}{\alpha} \end{aligned}$$

b) Freier Fall

Bewegungsgleichung:

$$m\dot{v} = mg - \alpha v$$

Lösung:

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)\right) + v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)$$

Beweis: Prüfe für dieses $v(t)$

1. $v(0) = v_0$ (Anfangsbedingung)
2. $v(t)$ erfüllt die Bewegungsgleichung

Asymptotisches Verhalten:

$$v(t \rightarrow \infty) = \frac{mg}{\alpha} = \text{const.}$$

