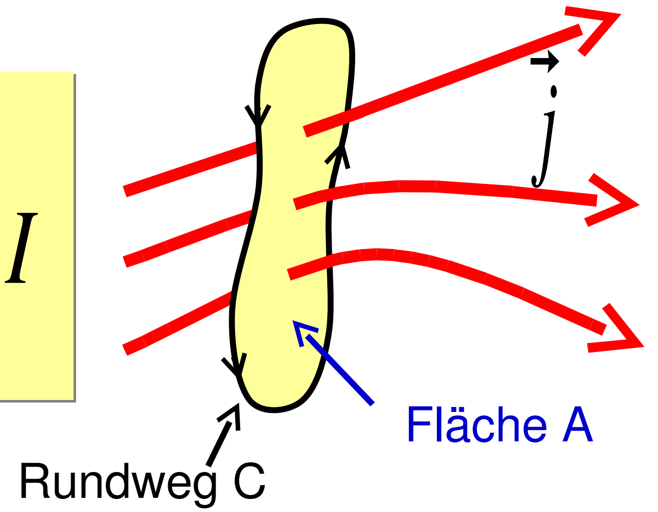
1.5.2. Magnetfelder stationärer Ströme -Wiederholung

Amperesches Gesetz

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_A \vec{\nabla}\times\vec{B}\,d\vec{A} = \mu_0 \int_A \vec{j}\,d\vec{A} = \mu_0 I$$

Satz von Stokes

Empirische Tatsache



$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$$

nicht konservativ!

Das Magnetfeld hat kein skalares Potential!

Beobachtung: Es gibt keine magnetischen Monopole

$\Leftrightarrow$ das Magnetfeld ist quellenfrei

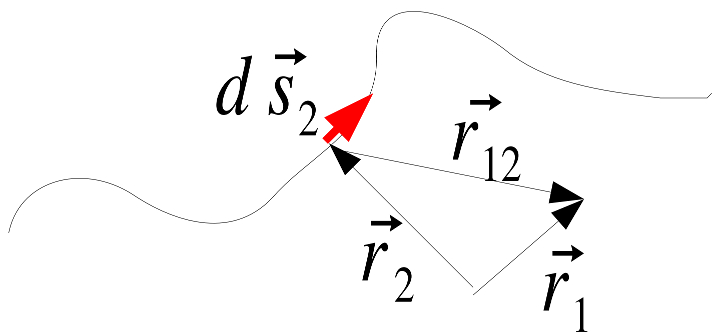
$\Leftrightarrow$ magnetische Feldlinien sind geschlossen

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

Berechnung des Magnetfeldes bei konstanter Stromdichte :

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{\vec{r}_{12} \times d\vec{s}_2}{r_{12}^3}$$

Biot-Savart-Gesetz



Rechte-Hand-Regel (Kreuzprodukt):

$$\text{Mittelfinger}\,(\vec{B}) \perp \text{Daumen}\,(\vec{r}_{12})$$
$$\perp \text{Zeigefinger}\,(d\vec{s}_2)$$

$$B = r_{12} \cdot d\,s_2 \cdot \sin\alpha$$

Falls $\vec{r}_{12} \parallel d\vec{s}_2$: Beitrag zum Magnetfeld=0

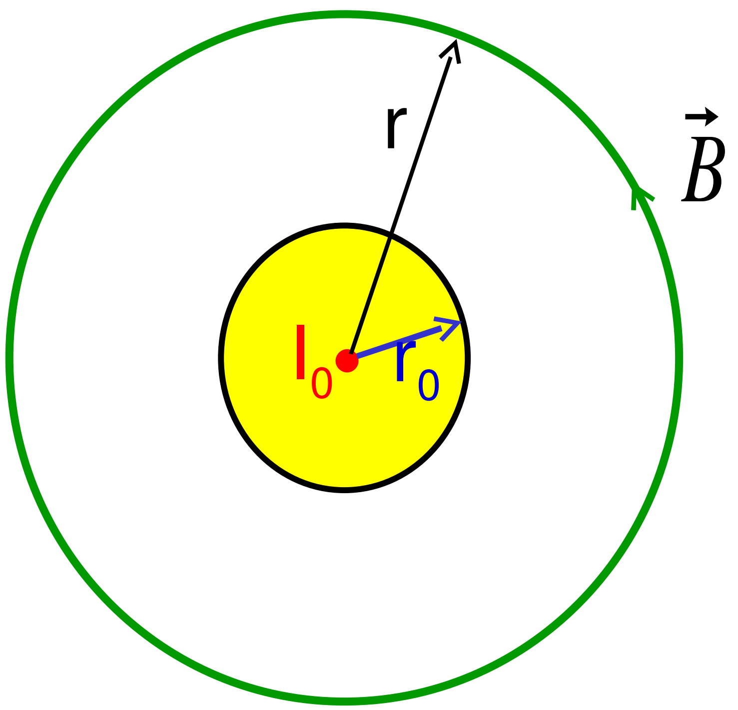
Rechte-Hand-Regel (gerader Leiter):

Daumen in Stromrichtung (Konvention: technische Stromrichtung "+" --> "-" entgegengesetzt gleich Elektrongeschwindigkeitsvektor)

=> Orientierung des Magnetfeldes in Richtung der restlichen Finger

<u>Beispiele:</u>

a) Stromdurchflossener Leiter

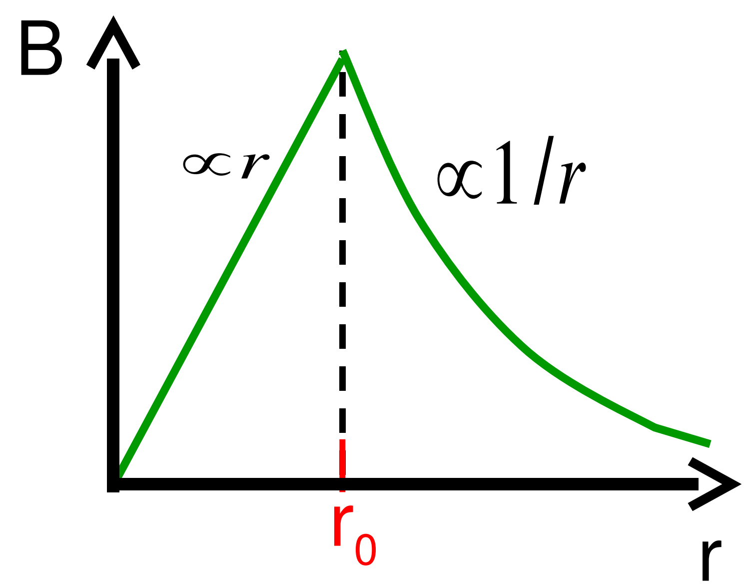


Symmetrie $\Rightarrow$ $\vec{B}(\vec{r}) = B(r) \cdot \vec{e}$

$$\oint \vec{B}(\vec{r})\, d\vec{s} = 2\pi r \cdot B(r)$$

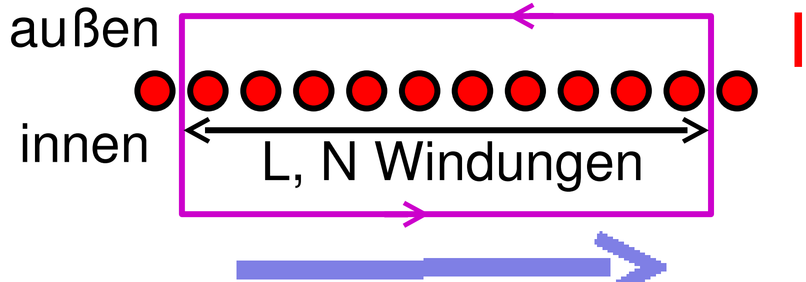
$$\mu_0 I = \mu_0 I_0 \cdot \begin{cases} 1 & , \quad \mathrm{r} \geq r_0 \\ (r/r_0)^2 & , \quad \mathrm{r} < r_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cdot \begin{cases} 1 & , \quad \mathrm{r} \geq r_0 \\ \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2 & , \quad \mathrm{r} < r_0 \end{cases}$$



b) Zylinderspule:

$$\vec{B} = \vec{0}$$



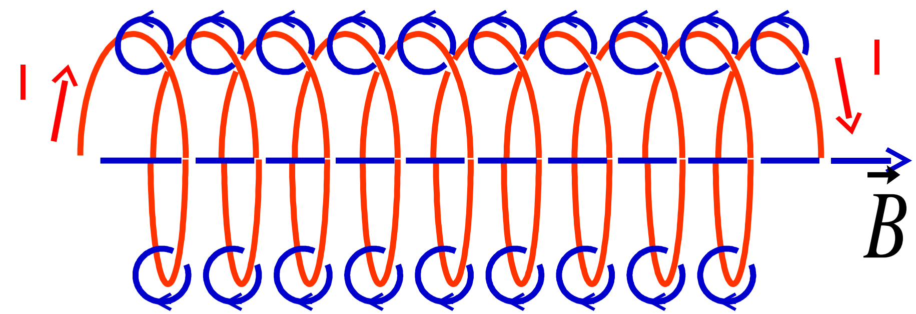
$$\vec{B} = \vec{B}_0 = \text{const}.$$

$$\oint \vec{B}(\vec{r})\, d\vec{s} = B_0 L = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

$$\Rightarrow B_0 = \mu_0 n I$$

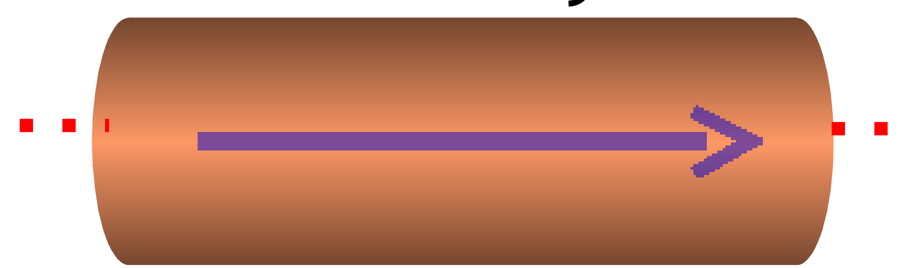
$$n = \frac{N}{L}$$ Wicklungsdichte

Streufeld: $\vec{B} \neq \vec{0}$



real: endlich lang, endliche Wicklungsdichte

$\left.\begin{array}{l}\text{Streufelder entweichen}\\ \text{im Unendlichen}\end{array}\right\} \vec{B} = \vec{0}$

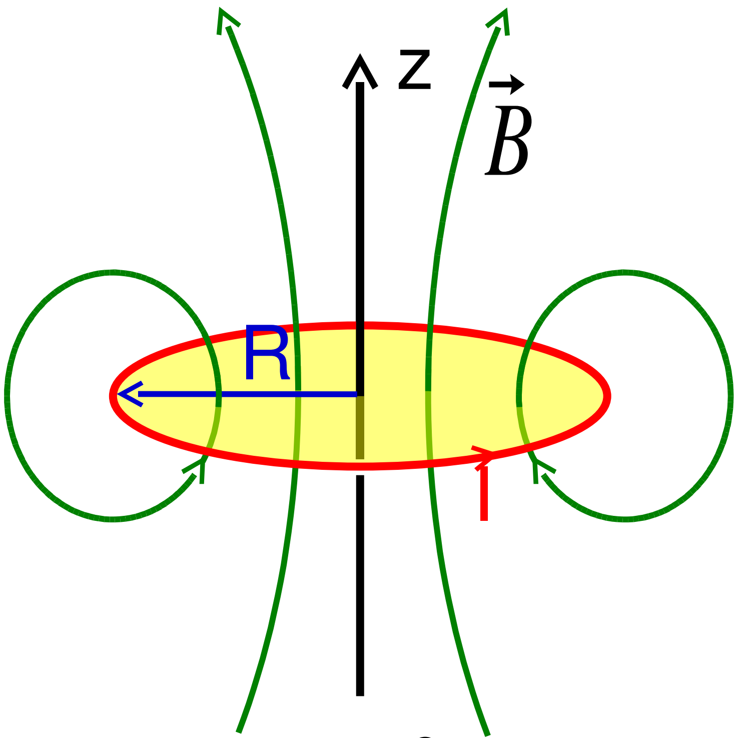


ideal: unendlich lang und dicht gewickelt

c) Stromschleife: Paradebeispiel für Biot-Savart-Gesetz

$$|\vec{r}| \gg R \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \, \vec{p}_m}{2\pi \, r^3}$$

Dipolfeld



$$\vec{a} = R^2 \cdot \vec{e}_z$$

mit

Magnetisches Dipolmoment

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{a}$$

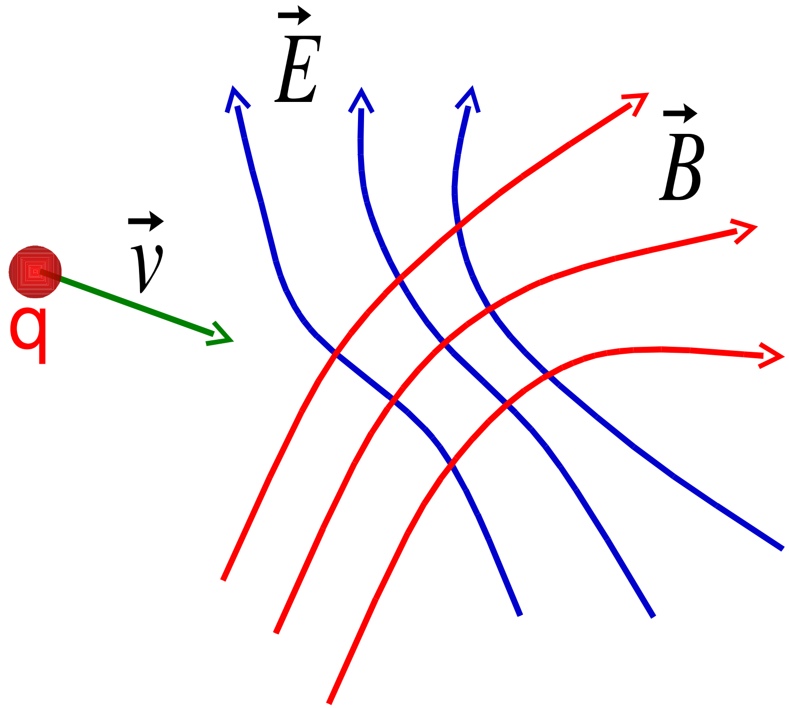
Bemerkung: Resultat gilt für beliebige Form der Fläche. Das magnetische Dipolmoment ist eine charakteristische Größe!

1.5.3. Die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Coulomb-Kraft

Lorentz-Kraft



Rechte-Hand-Regel (Kreuzprodukt):

Für positive Ladungen q:

Mittelfinger $(\vec{F}) \perp$ Daumen $(\vec{v})$ und Zeigefinger $(\vec{B})$

Bei negativen Ladungen:

Vorzeichen der Kraft umdrehen oder linke Hand benutzen

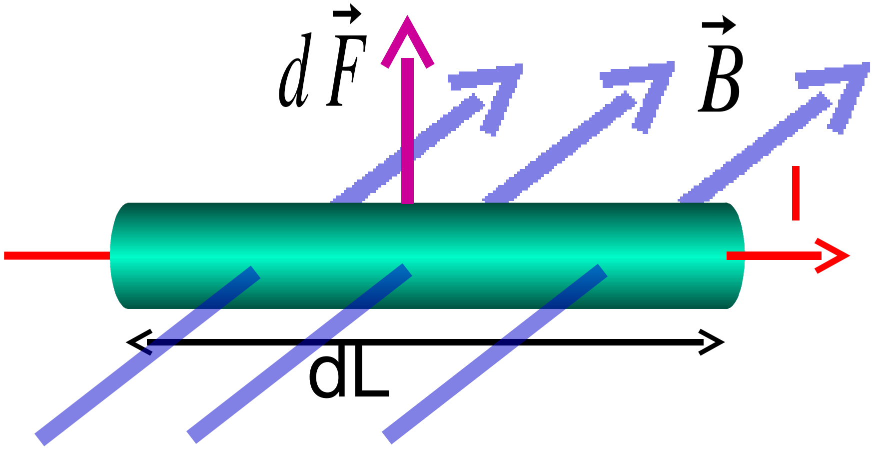
Beispiele:

a) Kraft auf stromdurchflossenen Leiter

v_D = Driftgeschwindigkeit der Ladungen q

n = #Ladungen q pro Volumen

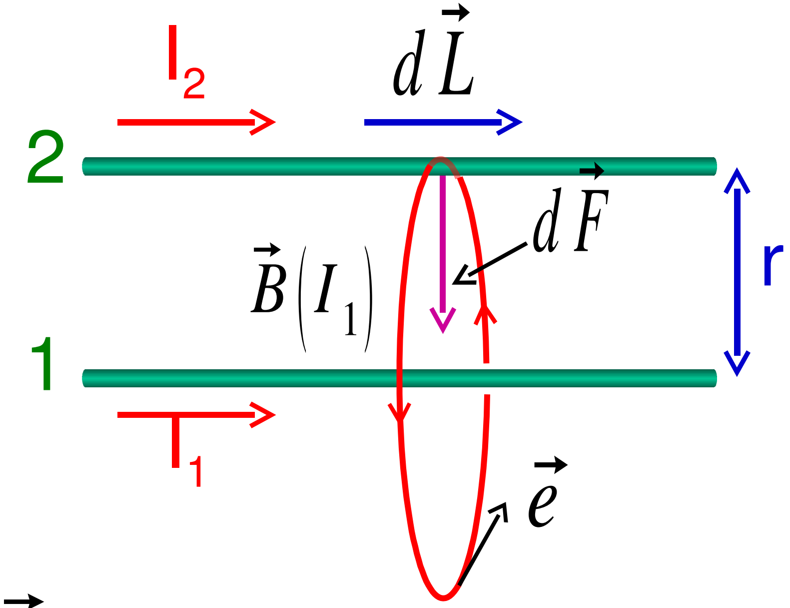
a = Leiterquerschnitt



$$I = j \cdot a = q \cdot \underbrace{n \cdot v_D \cdot a}_{\text{\#q pro s durch a}}$$

$$d\vec{F} = \underbrace{n a \, \mathrm{dL}}_{\text{\#Ladungen in dL}} \, q \vec{v}_D \times \vec{B} = I \cdot d\vec{L} \times \vec{B}$$

b) Spezialfall: Zwei parallele Drähte



I_1 durch Draht 1 $\Rightarrow$ $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1 \cdot \vec{e}$

$\Rightarrow$ Kraft auf Draht 2: $d\vec{F} = I_2 \, d\vec{L} \times \vec{B}$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} d\vec{L} \times \vec{e}$$

$d\vec{L} \perp \vec{e} \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{Anziehung, falls } I_1 \text{ und } I_2 \text{ gleichsinnig} \\ \text{Abstoßung, falls } I_1 \text{ und } I_2 \text{ gegensinnig} \end{cases}$

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \overset{I_1 = I_2 = I}{=} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{r}$$

$\frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ $\Rightarrow$ Definition der Stromstärke 1 A

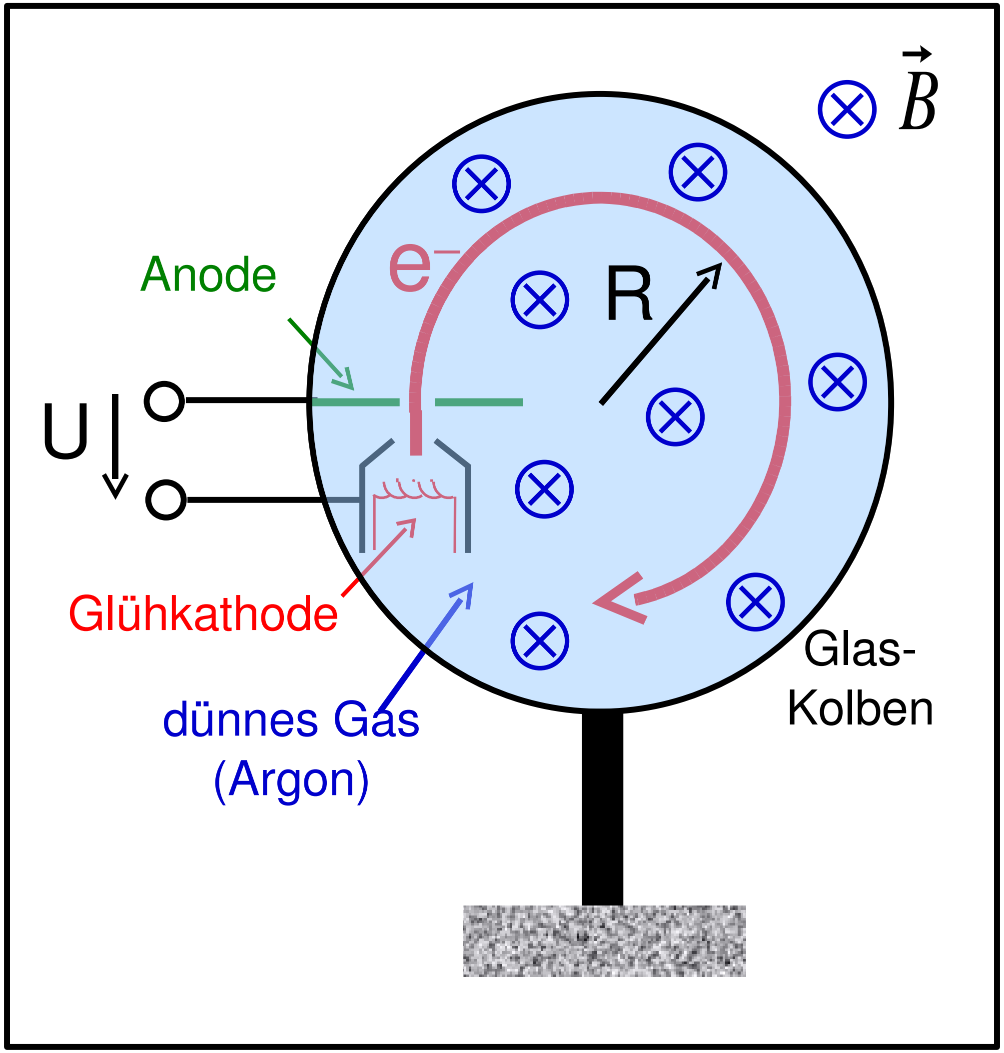
c) Fadenstrahlrohr:

$$\frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 = eU \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\mathrm{eU}}{m}}$$

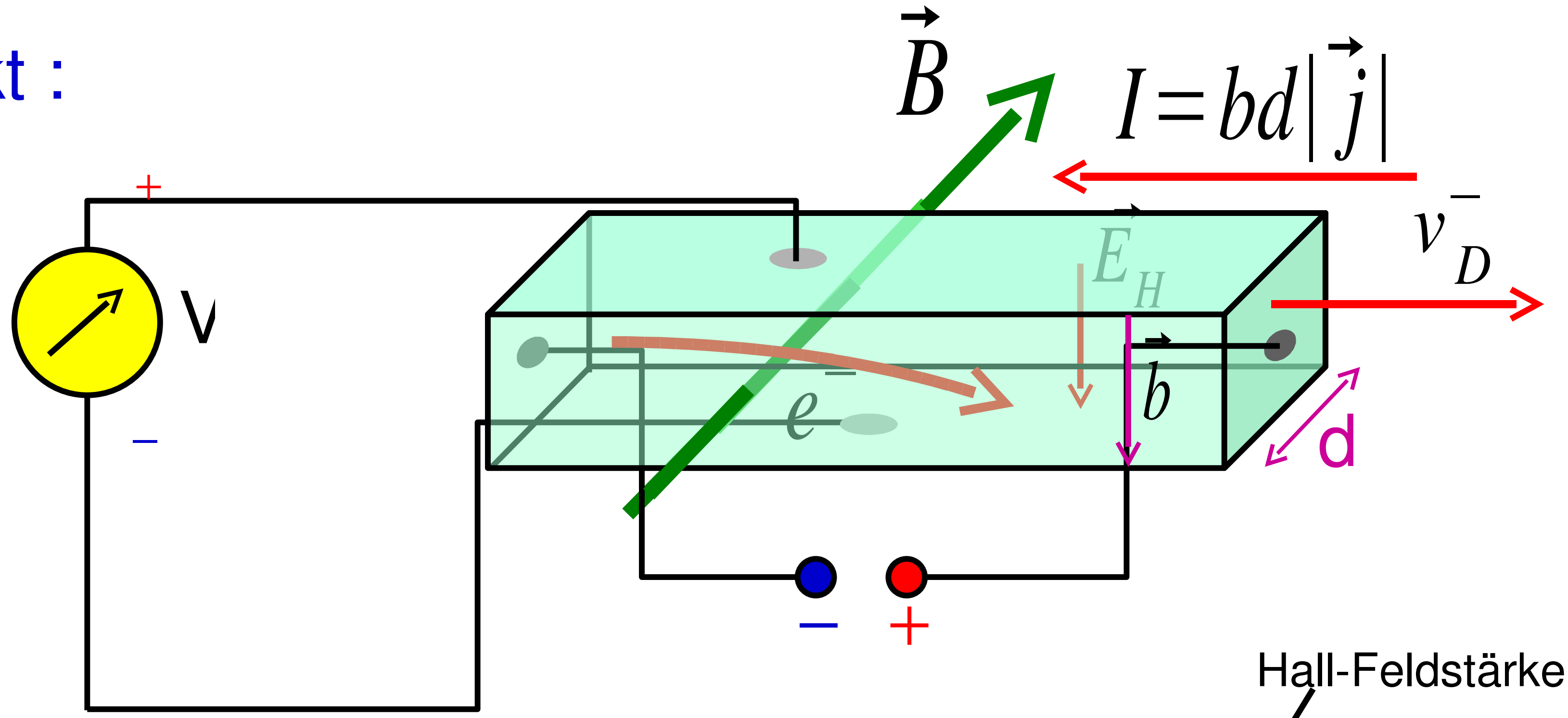
$$\frac{mv^2}{R} = evB \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{eB}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{\sqrt{2\mathrm{U}}}{B}\sqrt{\frac{e}{m}}}$$

$\Rightarrow$ Messung von e/m



d) Hall-Effekt :



Magnetische Kraft/Volumen: $nq\,\vec{v}_D \times \vec{B}$

Elektrische Kraft/Volumen (durch Ladungsträgertrennung): $nq\,\vec{E}_H$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_H = -\vec{v}_D \times \vec{B} = -\frac{\vec{j}}{nq} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow U_H = \int \vec{E}_H \, d\vec{s} = \vec{b}\,\vec{E}_H = -\frac{\left(\vec{j} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{b}}{nq}$$

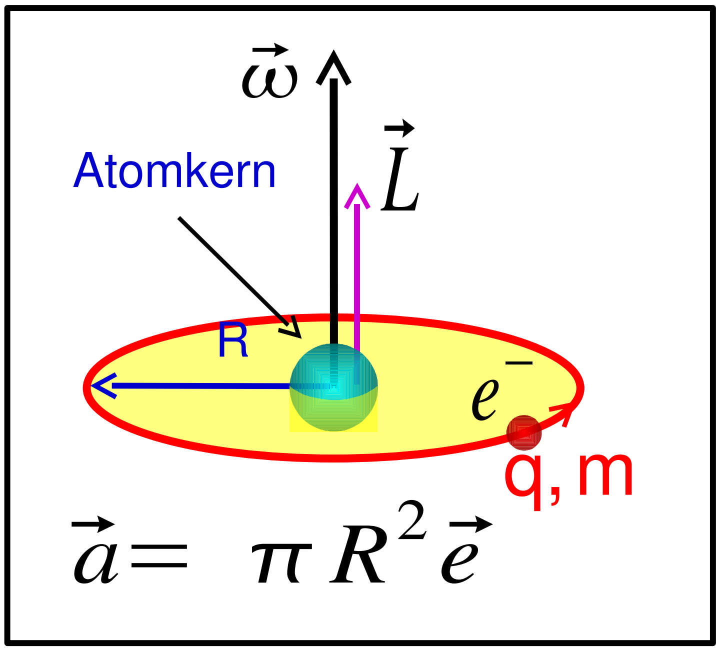
$$= -\frac{jBb}{nq} = -\frac{IBb}{nqbd} = -\frac{IB}{nqd} = \frac{IB}{ned} \text{ (für Elektronenleitung)}$$

B-Feldmessung mit Halbleitersonden, da Hallspannung schon groß bei kleinem B!

1.5.4. Magnetisierung

Problem: Statische magnetische Felder in Materie

atomarer magnetischer Dipol: $\vec{p}_m = I\,\vec{a} = q\,\dfrac{v}{2\pi R}\cdot \pi R^2 \vec{e}$



$$= \frac{1}{2} q R^2 \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = m\left(\vec{R}\times\vec{v}\right) = mR^2\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_m = \frac{q}{2\mathrm{m}}\cdot\vec{L}}$$

Bohrsches Atommodell: $q = -e$; $m = m_e$; $L = \ell\hbar$, $\ell = 0,1,2,\ldots$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\vec{p}_m| = l\cdot\frac{e\hbar}{2\mathrm{m}_e} = l\cdot\mu_B}$$

Bohrsches Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2\mathrm{m}_e} = 9{,}2742\cdot 10^{-24}\,Am$$

Magnetisierung: Ausrichtung atomarer $\vec{p}_m$ $\begin{cases} \text{i. von außen induzierte Ströme} \\ \text{ii. permanent vorhanden: } \ell > 0, \\ \quad \text{Spins ungepaarter Elektronen} \end{cases}$

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{V} \vec{p}_{m_i}$$

Magnetisierungsstromdichte: $\vec{j}_m = \operatorname{rot} \vec{M}$

Freie Stromdichte: $\vec{j}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_m \right) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \operatorname{rot} \vec{M}$

<u>Def.:</u> Magnetische Erregung $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ (Materialgleichung)

Verstärkung/Abschwächung des Feldes je nach Richtung von $\vec{M}$

<u>Folgerung:</u> $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$ (Feldgleichung 1)

<u>Quellenfreiheit:</u> $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (Feldgleichung 2)

Lineare Näherung: $\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$ χ_m: magnetische Suszeptibiliät

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0\left(1 + \chi_m\right)\vec{H} \equiv \mu\,\mu_0\,\vec{H} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu\,\mu_0\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\text{Relative Permeabilität:} \quad \mu \equiv \mu_r \equiv 1 + \chi_m}$$

Faustregel: Für homogene isotrope Medien ersetze in allen Formeln für das Vakuum einfach μ_0 durch $\mu \cdot \mu_0$.

Stoffklassen:

1. Diamagnete: $\chi_m < 0$
2. Paramagnete: $\chi_m > 0$

$\left.\right\} \; |\chi_m| \ll 1$

3. Ferromagnete: $\chi_m > 0$ $\quad |\chi_m| \gg 1$

Kraftwirkung: