

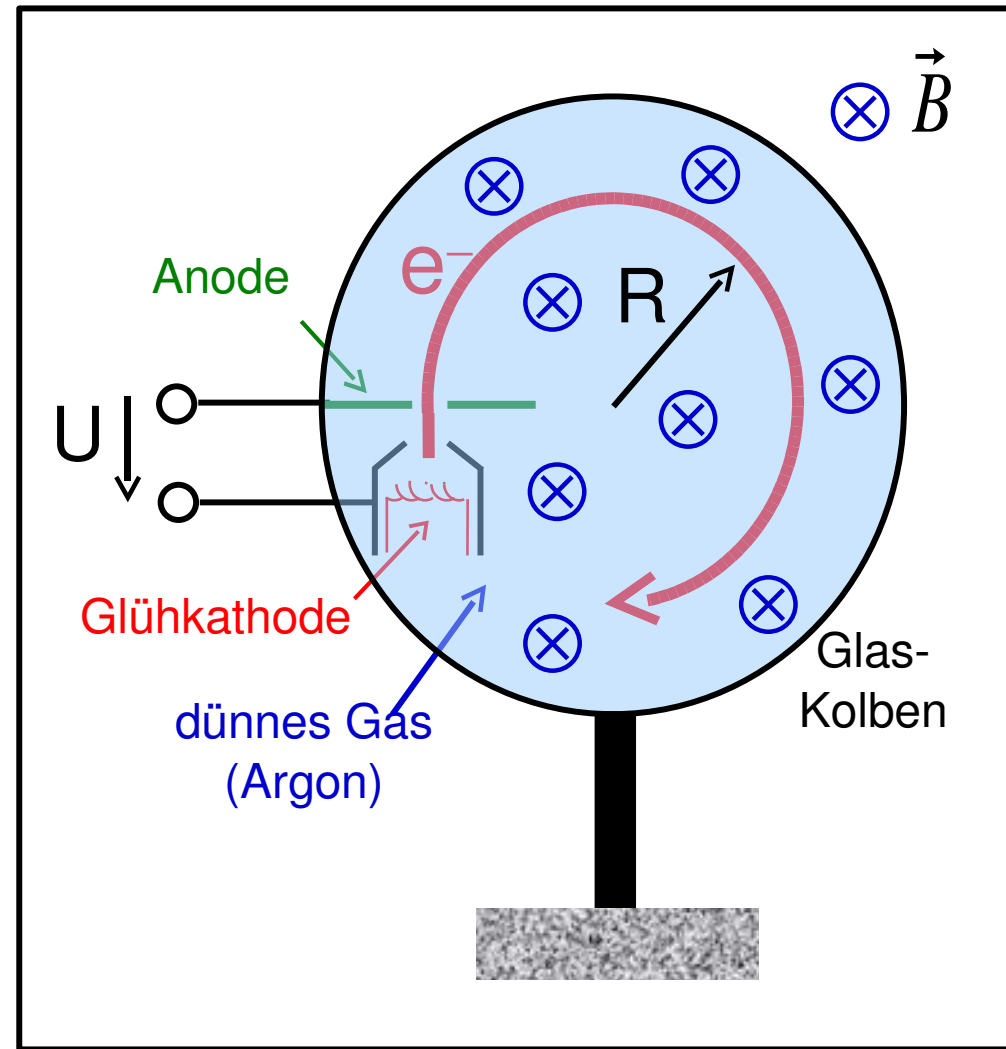
### c) Fadenstrahlrohr:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$\frac{mv^2}{R} = evB \Rightarrow R = \frac{mv}{eB}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{2U}}{B} \sqrt{\frac{m}{e}}$$

⇒ Messung von  $e/m$

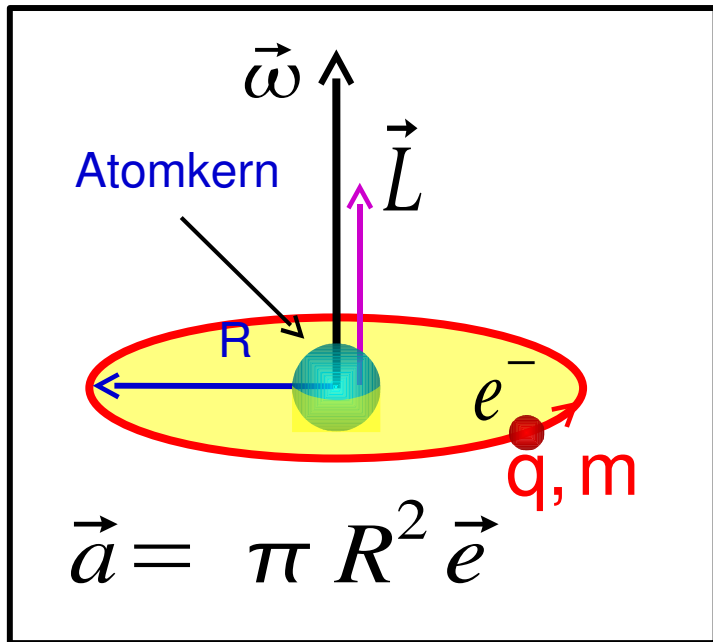


**KORREKTUR DER FORMEL (Vorlesung 23.5.08)!**

# 1.5.4. Magnetisierung

## Problem: Statische magnetische Felder in Materie

atomarer magnetischer Dipol:  $\vec{p}_m = I \vec{a} = q \frac{\omega}{2\pi} \cdot \pi R^2 \vec{e}$



$$= \frac{1}{2} q R^2 \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = m (\vec{R} \times \vec{v}) = m R^2 \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_m = \frac{q}{2m} \cdot \vec{L}$$

Bohrsches Atommodell:  $q = -e$ ;  $m = m_e$ ;  $L = l h$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow |\vec{p}_m| = l \cdot \frac{e \hbar}{2m_e} = l \cdot \mu_B$$

Bohrsches Magneton

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m_e} = 9,2742 \cdot 10^{-24} \text{ Am}$$

Magnetisierung: **Ausrichtung atomarer**  $\vec{p}_m$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{i. von au\u00dfen induzierte Str\u00f6me} \\ \text{ii. permanent vorhanden: } \ell > 0, \\ \text{Spins ungepaarter Elektronen} \end{array} \right.$

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{\underline{v}} \vec{p}_{m_i}$$

Magnetisierungsstromdichte:  $\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M}$

Freie Stromdichte:  $\vec{j} \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \text{rot } \vec{M}$

Def.: **Magnetische Erregung**  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$  (Materialgleichung)

Verst\u00e4rkung/Abschw\u00e4chung des Feldes je nach Richtung von  $\vec{M}$

Folgerung:  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$  (Feldgleichung 1)

Quellenfreiheit:  $\text{div } \vec{B} = 0$  (Feldgleichung 2)

Lineare Näherung:  $\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$   $\chi_m$ : magnetische Suszeptibilität

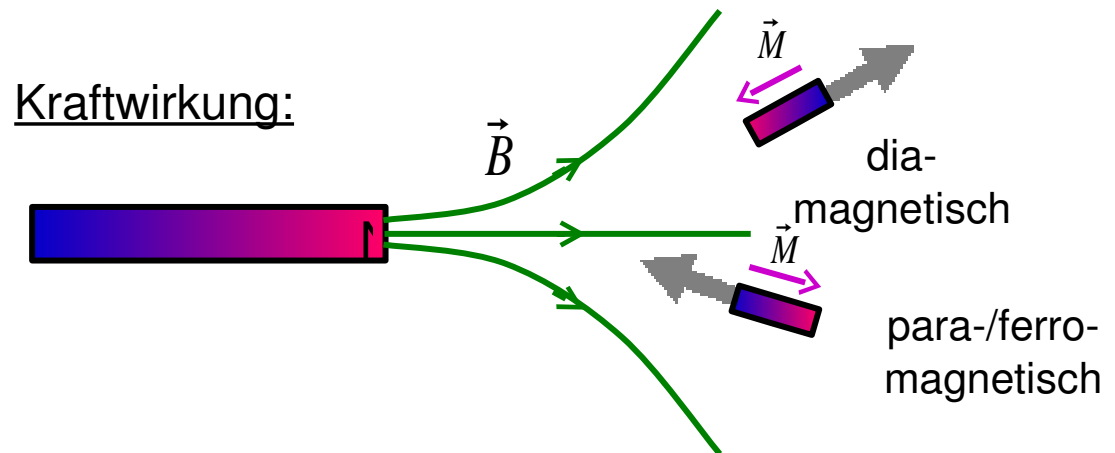
$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \equiv \mu \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{j}$$

Relative Permeabilität:  $\mu \equiv \mu_r \equiv 1 + \chi_m$

Faustregel: Für homogene isotrope Medien ersetze in allen Formeln für das Vakuum einfach  $\mu_0$  durch  $\mu \cdot \mu_0$ .

Stoffklassen:

- |                  |              |                    |
|------------------|--------------|--------------------|
| 1. Diamagnete:   | $\chi_m < 0$ | } $ \chi_m  \ll 1$ |
| 2. Paramagnete:  | $\chi_m > 0$ |                    |
| 3. Ferromagnete: | $\chi_m > 0$ | } $ \chi_m  \gg 1$ |



# a) Diamagnetismus

- abgeschlossene Elektronenschalen  $\rightarrow l=0$ , kein Spin

$\Rightarrow$  keine permanenten atomaren magnetischen Dipolmomente

- Induzierte Dipole wirken abschwächend ( $\leftrightarrow$  Lenzsche Regel, Elektrodynamik)

$$|\chi_m| \sim O(10^{-5})$$

Abschätzung der Größenordnung:  $R \approx \text{const.}$

Zentripetalkraft:  $F = \frac{m_e v^2}{R} \Rightarrow \Delta F \approx \frac{2m_e v}{R} \Delta y \approx qvB$

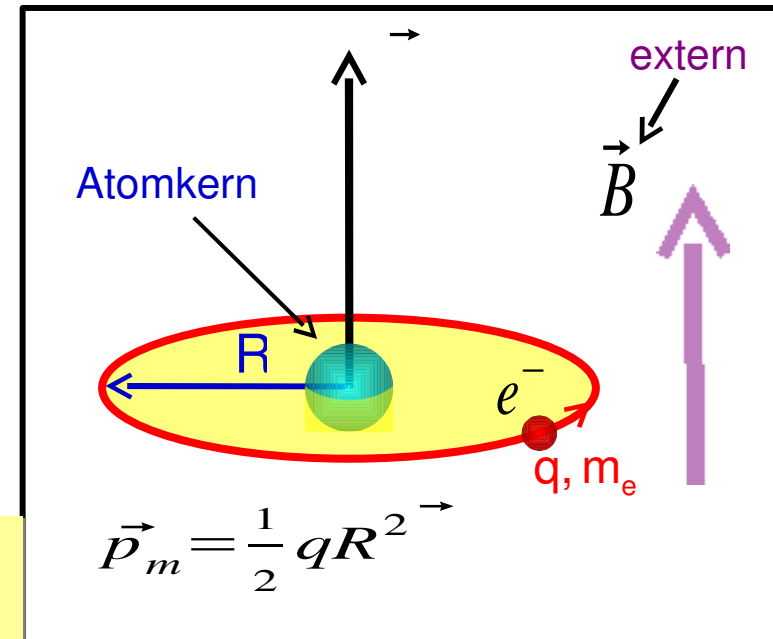
Magn. Moment:  $p_m = \frac{q}{2} R^2 \omega = \frac{q}{2} Rv \Rightarrow \Delta p_m \approx \frac{q}{2} R \Delta y$

$R \approx 1\text{\AA}$	$B \approx 1\text{T}$	$q = -e$
-------------------------	-----------------------	----------

$$\Rightarrow \Delta p_m \approx \frac{q^2 R^2}{4m_e} \cdot B \approx 10^{-28} \text{ Am}^2 \ll \mu_B \approx 10^{-23} \text{ Am}^2$$

- $l=0$ : Diamagnetismus, sehr kleiner Effekt

- $l > 0$ :  $p_{\text{atomar}} \gg \Delta p_m \Rightarrow$  Para/Ferromagnetismus

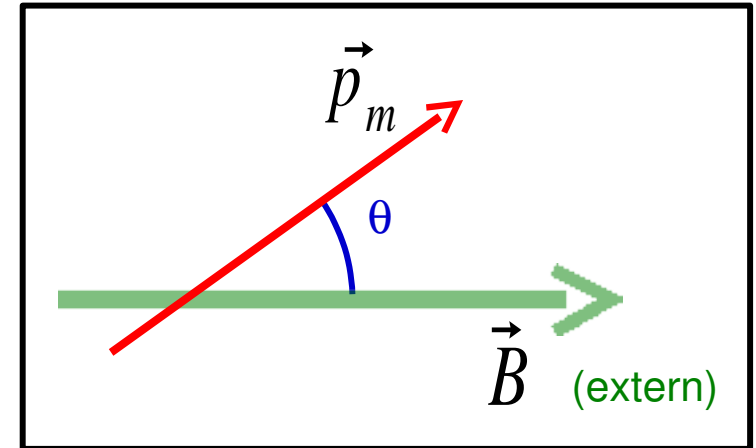


## b) Paramagnetismus

Permanente atomare magnetische Momente:  $\vec{p}_m$  statistisch orientiert

B = 0:  $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{\underline{v}} \vec{p}_m = \vec{0}$

B ≠ 0:  $E_{\text{pot}} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = -p_m B \cos \theta$



Boltzmann-Statistik  $\Rightarrow$

$$f(\cos \theta) \propto \exp\left(-\frac{E_{\text{pot}}}{kT}\right) = \exp\left(\frac{p_m B}{kT} \cos \theta\right) \approx 1 + \frac{p_m B}{kT} \cos \theta$$

$p_m B \ll kT$

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^1 f(\cos \theta) \cos \theta \, d \cos \theta}{\int_{-1}^1 f(\cos \theta) \, d \cos \theta} \approx \dots = \frac{p_m B}{3kT} \Rightarrow M = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{\# der } p_m \text{ pro } \Delta V}}{N} p_m \langle \cos \theta \rangle = \frac{N p_m^2}{3kT} \cdot B$$

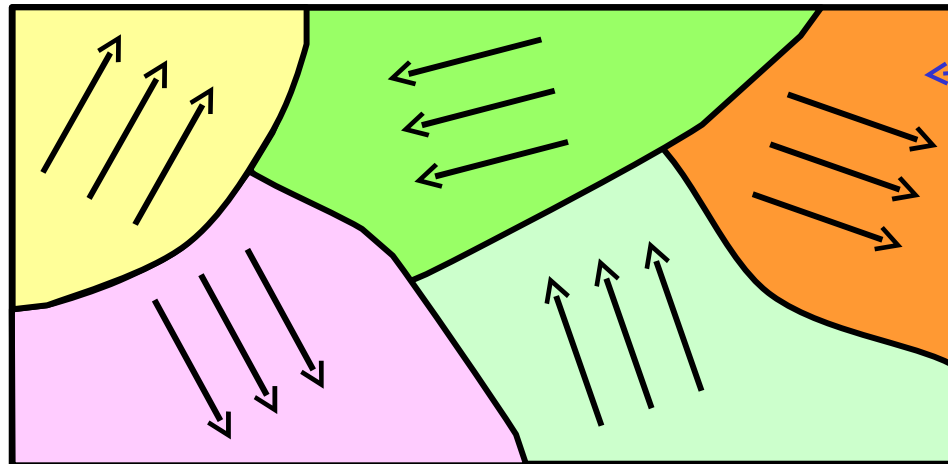
Curie-Gesetz:  $\chi_m = \mu_0 \frac{M}{B} = \mu_0 \frac{N p_m^2}{3kT}$  ( $\mu \approx 1$ )

$p_m = 1 \mu_B$ ,  $B = 1 \text{ T}$ ,  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $\Rightarrow M = 8 \cdot 10^{-4} N p_m$  winzig!

## c) Ferromagnetismus

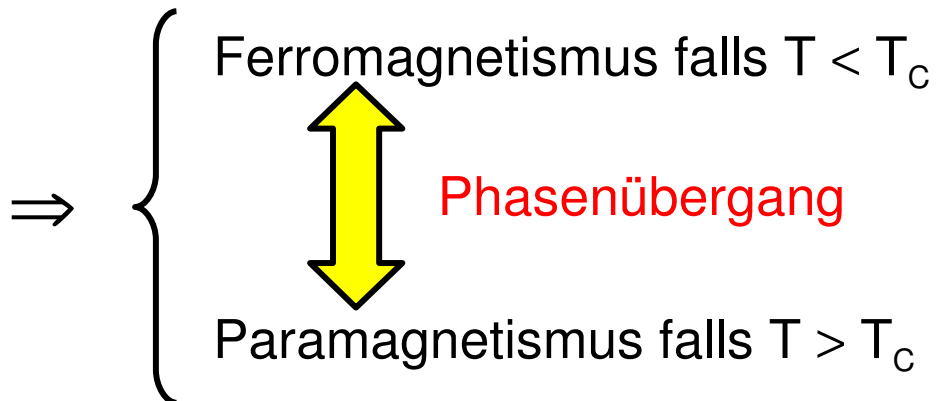
- Atome / Moleküle mit **ungepaarten** äußeren Elektronen  $\Rightarrow$  **Spin**  $\Rightarrow \vec{p}_m$
- Quantenmechanische **Austauschwechselwirkung** der Elektronen  $\Rightarrow$  **permanente atomare magnetische Momente:  $\vec{p}_m$  spontan kollektiv orientiert**
- Paradebeispiel: **Eisen (Fe)**, **Cobalt (Co)**, **Nickel (Ni)**: 3 ungepaarte f-Elektronen

Kein äußeres Feld  $\Rightarrow$   
Zustände minimaler  
Energie haben  $M_{\text{tot}} = 0$



Magnetische Domänen  
(**Weißsche Bezirke**)  
sind spontan magnetisiert

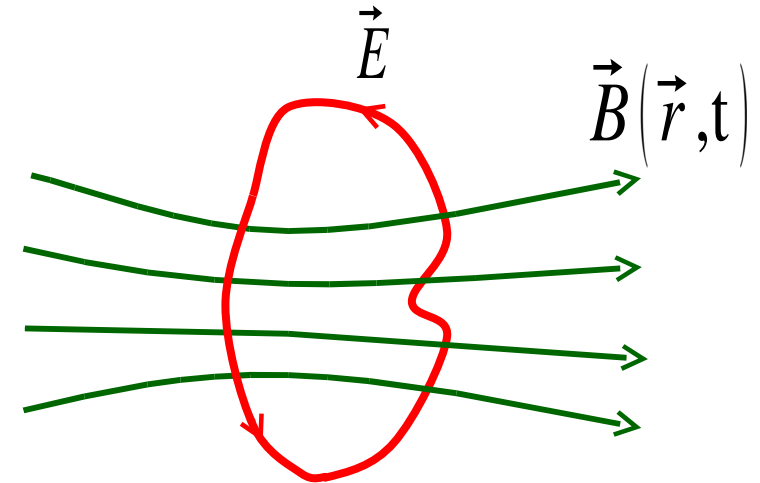
Kritische Temperatur  
(**Curie-Temperatur  $T_C$** )



# 2. Elektrodynamik – Quasistatik

## 2.1.1 Faradaysches Induktionsgesetz

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &\equiv \oint \vec{E} d\vec{s} && \text{Stokes} && = \int \text{rot } \vec{E} d\vec{a} \\ &= - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{a} && \text{feste} && = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{a} = - \dot{\Phi}_M \\ &&& \text{Schleife} && \end{aligned}$$



- fiktiver geschlossener Weg
- reale Leiterschleife

$U_{\text{ind}}$ : induzierte Spannung gemessen in der Schleife

$\Phi_M$ : magnetischer Fluss gemessen im Labor

Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}_M$$

Bemerkung:  $U_{\text{ind}}$  ist wegabhängig  $\Rightarrow$  keine Potentialdifferenz.

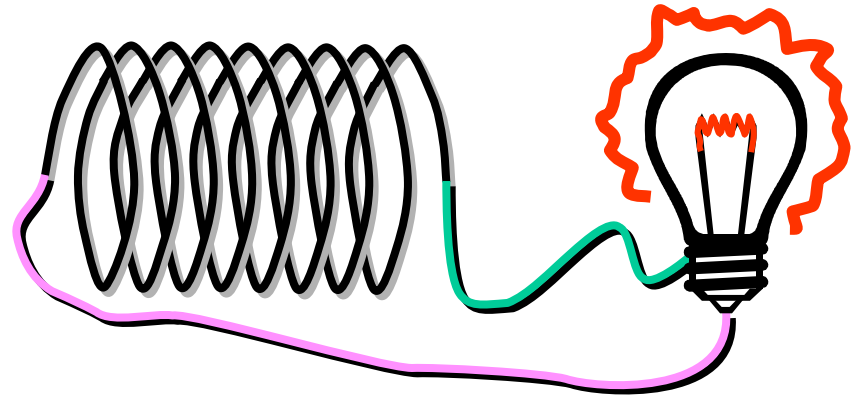
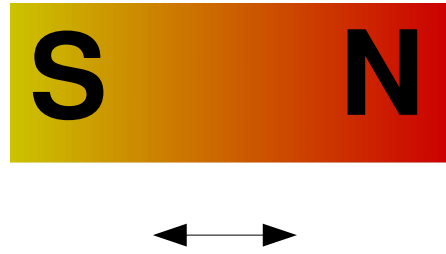
Daher oft Bezeichnung:  $U_{\text{ind}} \equiv \text{EMK}$  (Elektro-Motorische Kraft)



Test 1: B-Feld: variabel

Leiterschleife: fest

$$U_{\text{ind}} = - \int \dot{\vec{B}} d\vec{a}$$



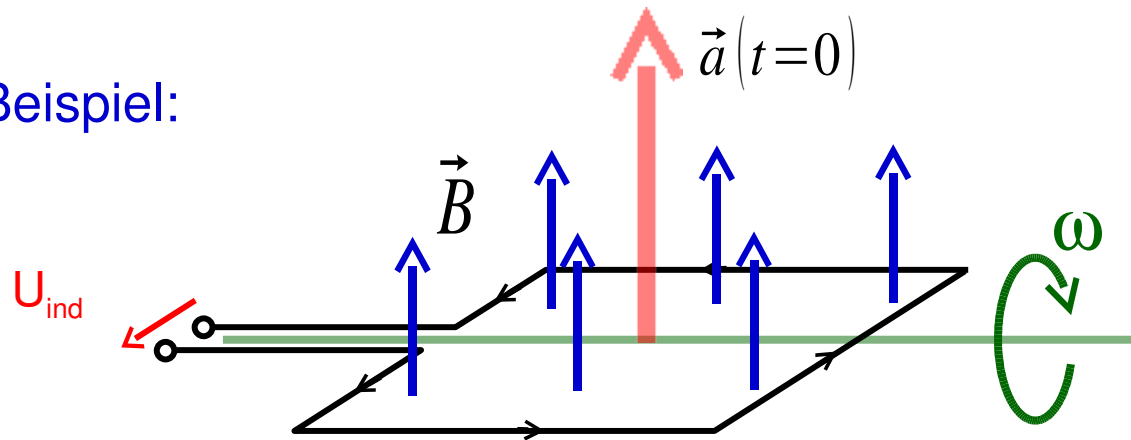
- $U_{\text{ind}} \propto$  Zahl der Spulenwicklungen
- Vorzeichen von  $U_{\text{ind}}$  wechselt mit Bewegungsrichtung des Magneten
- Vorzeichen von  $U_{\text{ind}}$  wechselt mit Magnetorientierung
- Effekt durch Eisenkern verstärkbar
- Magnet ersetzbar durch Spule mit variierendem Stromfluss

## Test 2: B-Feld: konstant    Leiterschleife: variable Orientierung

Spezialfall: B homogen , Schleife eben

$$\Phi_M = \vec{B} \cdot \vec{a}(t) = B a \cos \phi(t) \Rightarrow U_{\text{ind}} = B a \omega \sin \phi(t), \quad \omega = \dot{\phi}(t)$$

Beispiel:



$$\omega = \text{const.} , \quad \phi(t) = \omega t \Rightarrow U_{\text{ind}} = B a \omega \sin(\omega t)$$

$\Rightarrow$  Wechselspannungsgenerator (Dynamo)

## Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}_M$$



Lenzsche Regel: Die Induktion wirkt ihrer Ursache stets **entgegen**  
(Gegenspannungen, Gegenkräfte etc. )

### Herleitung:

- im Einzelfall:  $U_{\text{ind}} \Rightarrow I_{\text{ind}} \Rightarrow$  Gegenfeld  $B_{\text{ind}}$
- generell:  $U_{\text{ind}} \Rightarrow I_{\text{ind}} \Rightarrow$  Energieverbrauch  $\Rightarrow$  Ursache muß Arbeit verrichten  
 $\Rightarrow$  Gegen-„Kraft“

Anwendungsbeispiel: **Wirbelstrombremse**

## 2.1.2 Die Induktivität

Betrachte beliebige Leiterschleife

Beispiel: Spule

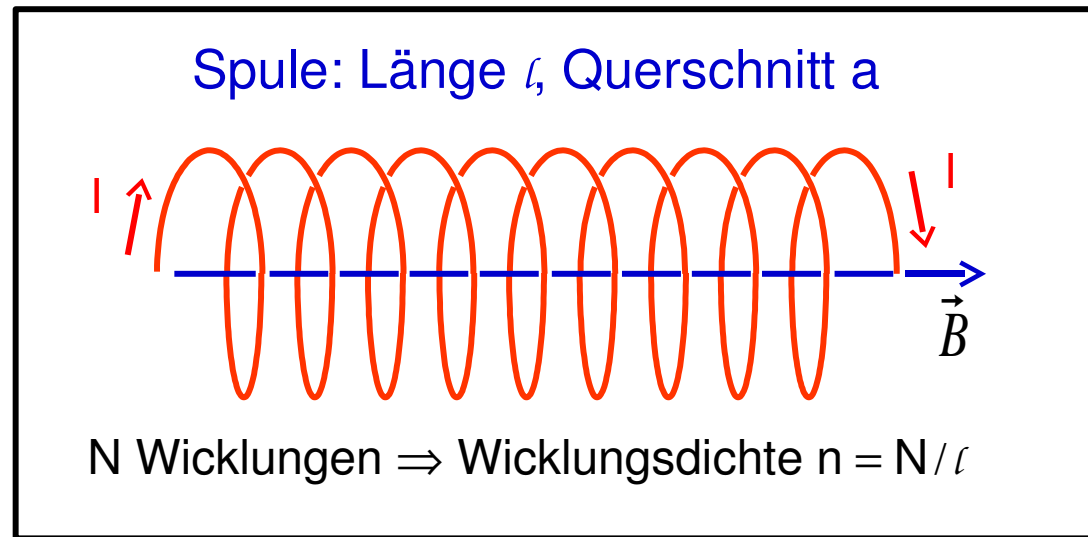
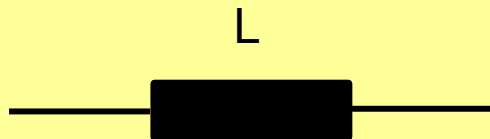
Biot-Savart-Gesetz  $\Rightarrow$

$$\vec{B} \propto I \Rightarrow \Phi_M = \int \vec{B} d\vec{a} \propto I \Rightarrow U_{ind} = -\dot{\Phi}_M \propto -\dot{I}$$

Definition:  $L = -\frac{U_{ind}}{\dot{I}}$  Selbstinduktionskoeffizient bzw. Induktivität

- L ist ein reiner Parameter der (festen) Schleifengeometrie
- Maßeinheit:  $[L] = \text{VsA}^{-1} = \text{H} = \text{Henry}$

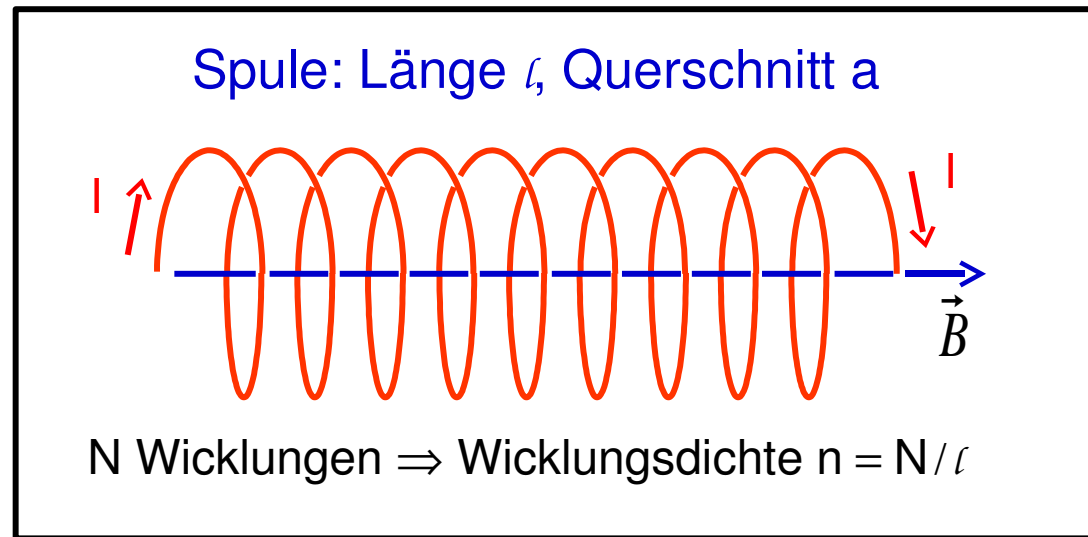
• Schaltsymbol



## Beispiel: Zylinderspule

Magnetostatik  $\Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 n I$

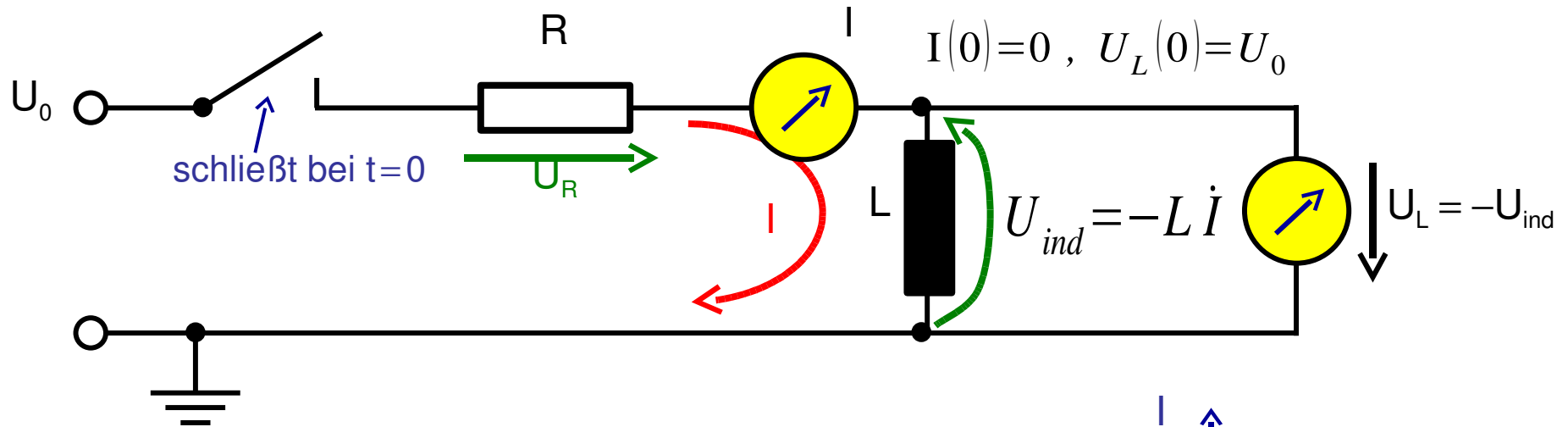
$$\Phi_M = \underbrace{Na}_{\text{Gesamt-Fläche}} B = \underbrace{n}_{\text{Spulen-Volumen}} V B$$



$$\left. \begin{aligned} U_{ind} &= -\dot{\Phi}_M = -n V \dot{B} = -\mu_0 n^2 V \dot{I} \\ U_{ind} &= -L \dot{I} \end{aligned} \right\} L = \mu_0 n^2 V \propto n^2$$

- Das Magnetfeld steigt proportional zur Wicklungsdichte
- Die Induktivität steigt mit dem Quadrat der Wicklungsdichte

# Beispiel: quasistatischer Einschaltvorgang einer Induktivität



Maschen B-Feld-frei (B-Feld eingesperrt in Induktivität)

$$\Rightarrow U_0 = U_R + U_L = U_R - U_{ind} = RI(t) + L \dot{I}(t)$$

Lösung:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right), \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$U_L(t) = L \dot{I} = U_0 e^{-t/\tau}$$

