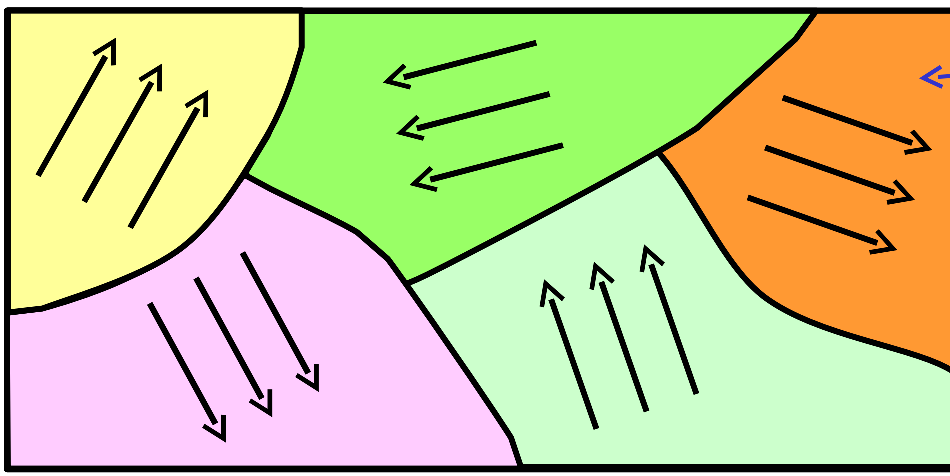
c) Ferromagnetismus

- Atome / Moleküle mit ungepaarten äußeren Elektronen $\Rightarrow$ Spin $\Rightarrow$ $\vec{p}_m$
- Quantenmechanische Austauschwechselwirkung der Elektronen $\Rightarrow$ permanente atomare magnetische Momente: $\vec{p}_m$ spontan kollektiv orientiert
- Paradebeispiel: Eisen (Fe), Cobalt (Co), Nickel (Ni): ungepaarte 3d-Elektronen

Kein äußeres Feld $\Rightarrow$ Zustände minimaler Energie haben $M_{tot} = 0$



Magnetische Domänen (Weißsche Bezirke) sind spontan magnetisiert

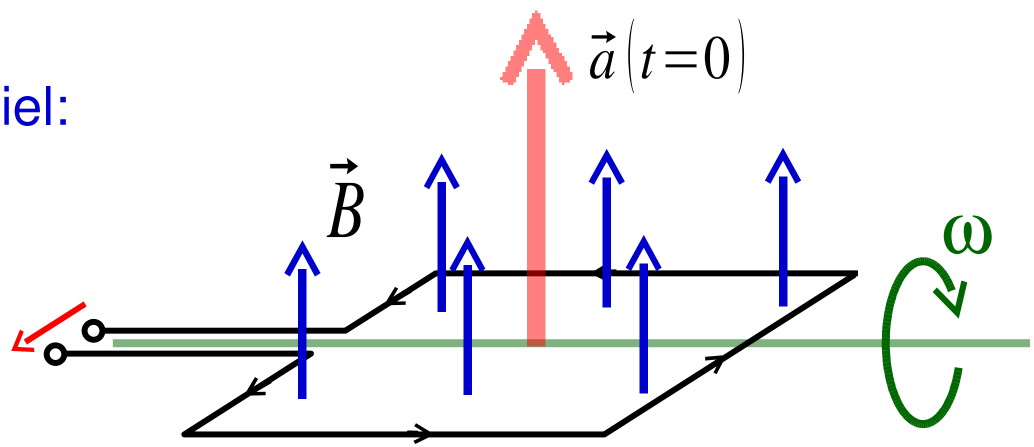
Kritische Temperatur (Curie-Temperatur T_C) $\Rightarrow$
- Ferromagnetismus falls $T < T_C$
- Phasenübergang
- Paramagnetismus falls $T > T_C$

Test 2: B-Feld: konstant   Leiterschleife: variable Orientierung

Spezialfall: B homogen , Schleife eben

$$\Phi_M = \vec{B} \cdot \vec{a}(t) = B\,a \cos\phi(t) \;\Rightarrow\; \boxed{U_{ind} = B\,a\,\omega \;\sin\phi(t), \;\; \omega = \dot{\phi}(t)}$$

Beispiel:

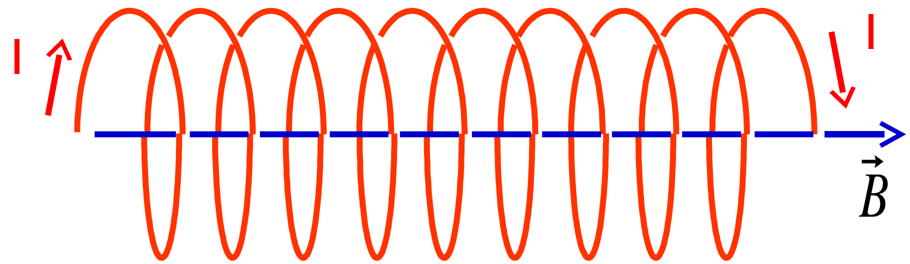


$$\omega = \text{const.}\,, \quad \phi(t) = \omega t \;\Rightarrow\; \boxed{U_{ind} = B\,a\;\omega \sin(\omega t)}$$

$\Rightarrow$ Wechselspannungsgenerator (Dynamo)

2.1.2 Die Induktivität

Spule: Länge ℓ, Querschnitt a



N Wicklungen $\Rightarrow$ Wicklungsdichte $n = N/\ell$

Betrachte beliebige Leiterschleife

Beispiel: Spule

Biot-Savart-Gesetz $\Rightarrow$

$$\vec{B} \propto I \quad \Rightarrow \quad \Phi_M = \int \vec{B}\, d\vec{a} \propto I \quad \Rightarrow \quad U_{ind} = -\dot{\Phi}_M \propto -\dot{I}$$

Definition: $$L = -\frac{U_{ind}}{\dot{I}}$$ Selbstinduktionskoeffizient bzw. Induktivität

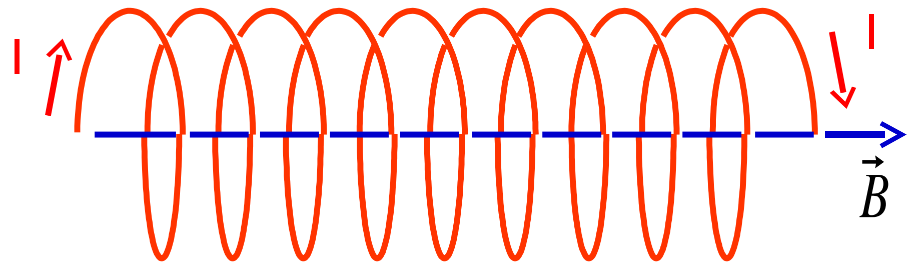
- L ist ein reiner Parameter der (festen) Schleifengeometrie
- Maßeinheit: $[L] = \mathrm{V\,s\,A^{-1}} = \mathrm{H}$ = Henry
- Schaltsymbol

Beispiel: Zylinderspule

Magnetostatik $\Rightarrow \; B = \mu_0 \, n \, I$

$$\Phi_M = \underbrace{Na}_{\text{Gesamt-Fläche}} B = n \underbrace{V}_{\text{Spulen-Volumen}} B$$

Spule: Länge ℓ, Querschnitt a

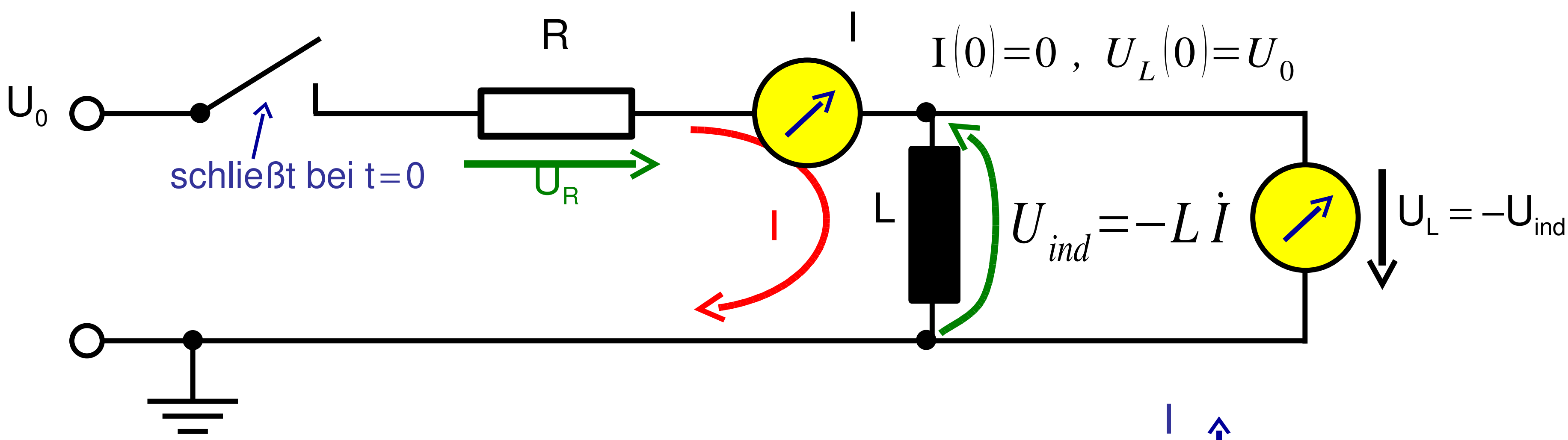


N Wicklungen $\Rightarrow$ Wicklungsdichte $n = N/\ell$

$$\left.\begin{array}{l} U_{ind} = -\dot{\Phi}_M = -n\,V\,\dot{B} = -\mu_0 \, n^2 \, V \, \dot{I} \\ U_{ind} = \qquad\qquad\qquad\qquad -L\,\dot{I} \end{array}\right\} \quad L = \mu_0 \, n^2 \, V \propto n^2$$

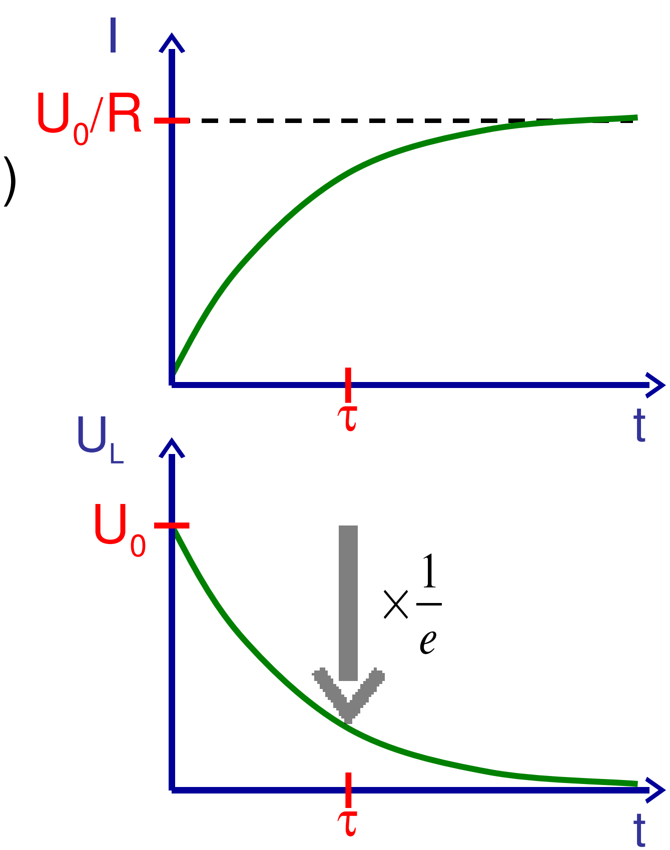
- Das Magnetfeld steigt proportional zur Wicklungsdichte
- Die Induktivität steigt mit dem Quadrat der Wicklungsdichte

Beispiel: quasistatischer Einschaltvorgang einer Induktivität



Maschen B-Feld-frei (B-Feld eingesperrt in Induktivität)

$$\Rightarrow\quad U_0=U_R+U_L=U_R-U_{ind}=RI(t)+L\,\dot{I}(t)$$



Lösung:

$$I(t)=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right),\qquad \tau=\frac{L}{R}$$

$$U_L(t)=L\,\dot{I}=U_0\,e^{-t/\tau}$$

Energie des Magnetfeldes einer Induktivität:

$$W_M = \int_0^t \underbrace{U_L(\tilde{t})}_{L\dot{I}(\tilde{t})} I(\tilde{t})\, d\tilde{t} = \frac{L}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tilde{t}} I^2(\tilde{t})\, d\tilde{t} = \frac{L}{2}\left(I^2(t) - \underbrace{I^2(0)}_{0}\right) = \frac{1}{2} L I^2$$

Vergleich: Kapazität $\leftrightarrow$ Induktivität

Magnetische Energie in Induktivität L	Elektrische Energie in Kapazität C
$W_M = \frac{1}{2} L I^2$	$W_{el} = \frac{1}{2} C U^2$

Energiedichte des Magnetfeldes in einer Spule:

$$\boxed{w_M = \frac{W_M}{V}} = \frac{1}{2}\frac{L}{V} I^2 \overset{L = \mu_0 n^2 V}{=} \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \overset{B = \mu_0 H = \mu_0 n I}{=} \boxed{\frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}}$$

gilt auch allgemein

Vergleich: magnetische Energiedichte $\leftrightarrow$ elektrische Energiedichte

$$w_M = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} \qquad\qquad w_{el} = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$$

2.1.3. Maxwell'scher Verschiebungsstrom

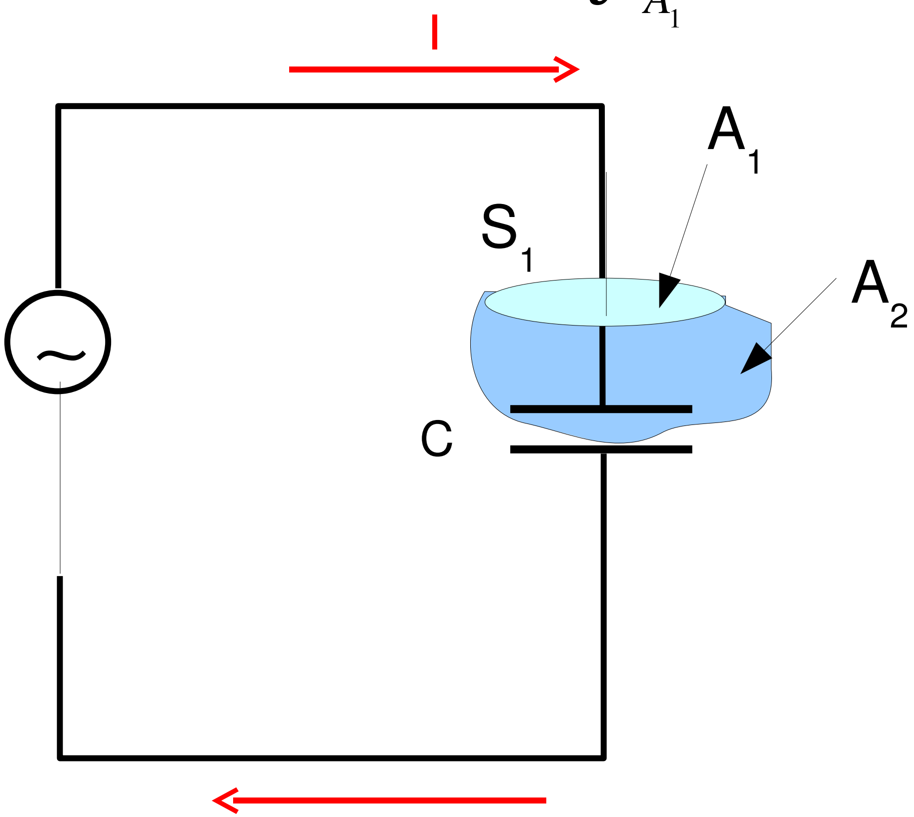
$$\int_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_{A_1} \vec{j}\cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{A_1} \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{A}$$

Aber: $\int_{A_2} \vec{j}\cdot d\vec{A} = 0$

$(\mathit{Fliesst\ ja\ auch\ kein\ Strom})$

Widerspruch!



Auflösung des Widerspruchs (Maxwell):

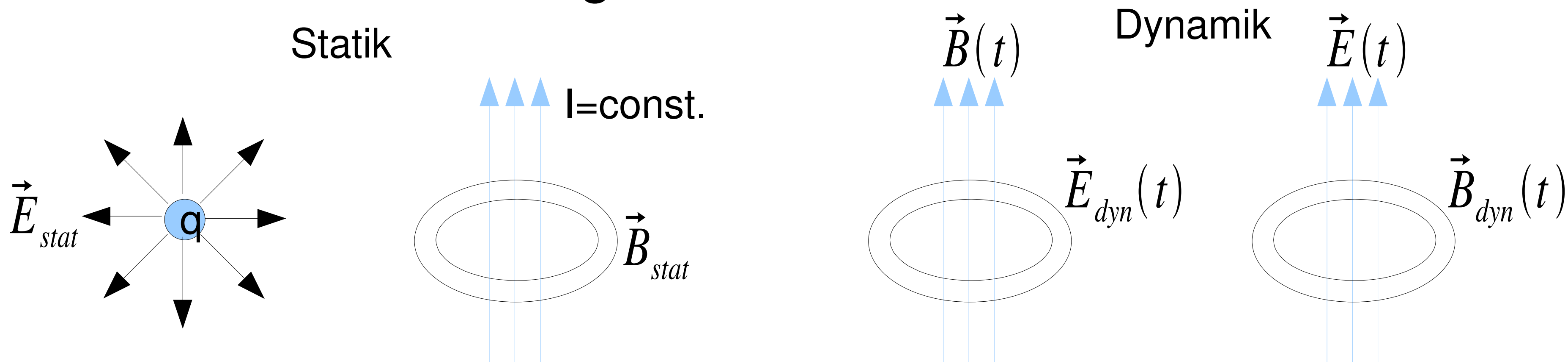
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(\epsilon_0 \vec{A}\vec{E}) = \epsilon_0 \vec{A}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Definiere: $\vec{j}_V = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\int_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_A (\vec{j}+\vec{j}_V)\cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0(\vec{j}+\vec{j}_V) = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2.1.4. Maxwell-Gleichungen



$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Elektrostatik, falls $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0}$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Faradaysches Induktionsgesetz

$$\operatorname{div}\vec{B}=0$$

Magnetostatik, falls $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{0}$

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Verschiebungsstrom

$\Downarrow$

- Kontinuitätsgleichung: $\operatorname{div}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$
- elektromagnetische Wellen

Kraftgleichung (Lorentz-Kraft):

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Im ladungs- und stromfreien Vakuum:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})=-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

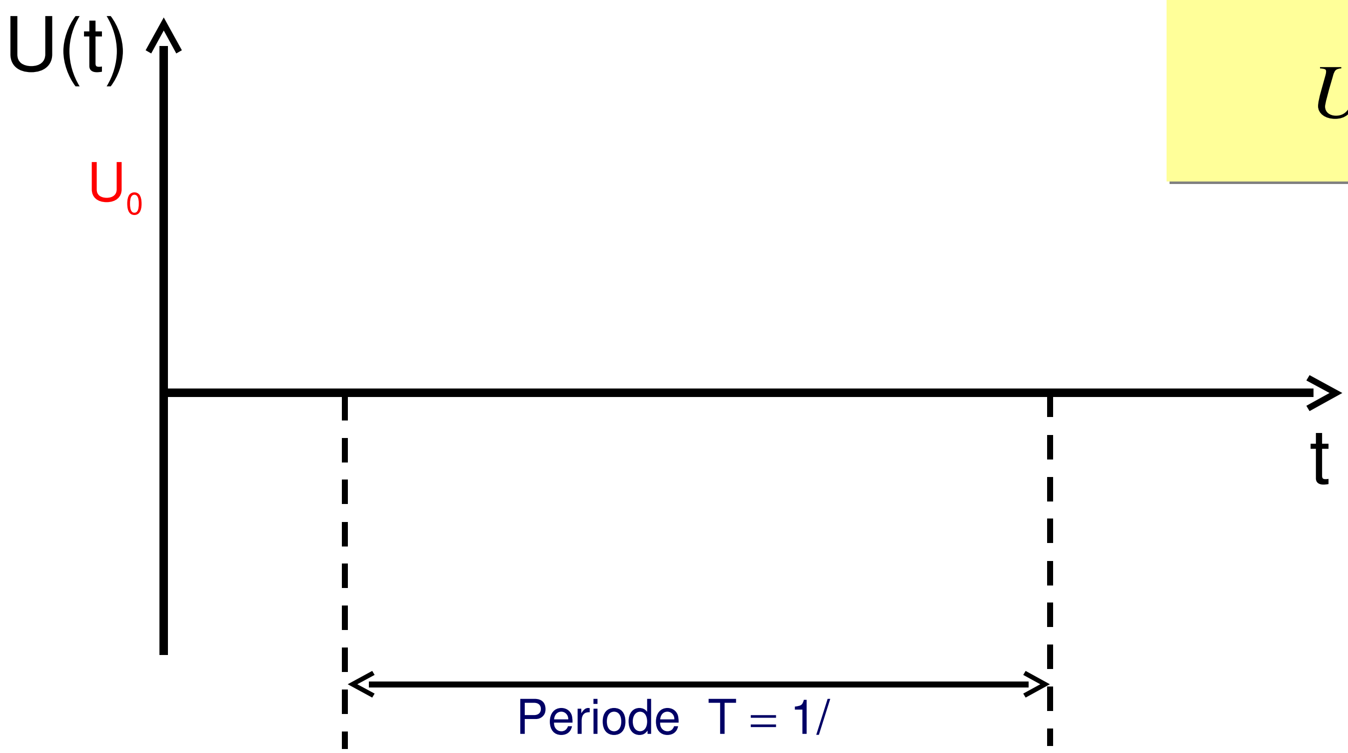
$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\Delta\vec{E}$$

$$\Delta\vec{E}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$

Analog erhält man eine Wellengleichung für das B-Feld

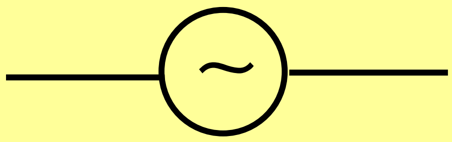
2.1.5. Wechselstrom



Harmonische Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega\ t)$$

Schaltsymbol:



U_0: Scheitelwert U(t): Momentanwert

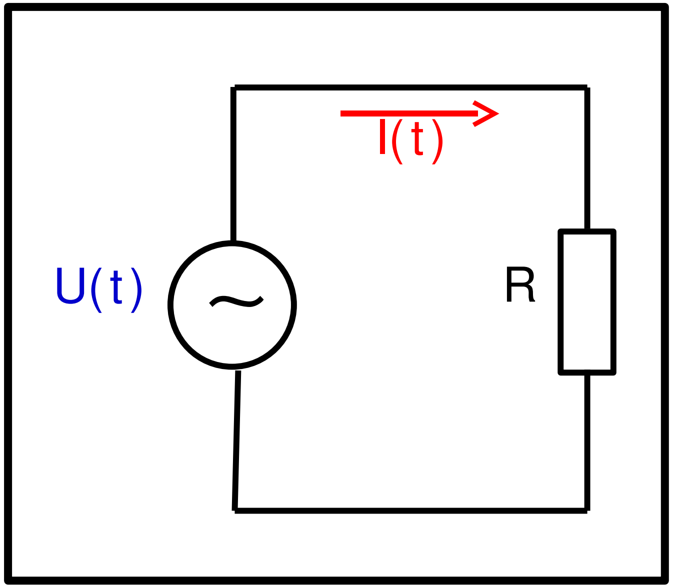
T: Periode $\nu = \frac{1}{T}$: Frequenz

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz

$$Europa: \begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \cdot 230\,V \\ \nu \ = 50\,\mathrm{Hz} \end{cases}$$

$$U.S.A.: \begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \cdot 110\,V \\ \nu \ = 60\,\mathrm{Hz} \end{cases}$$

Beispiel: Leistung im ohmschen Verbraucher



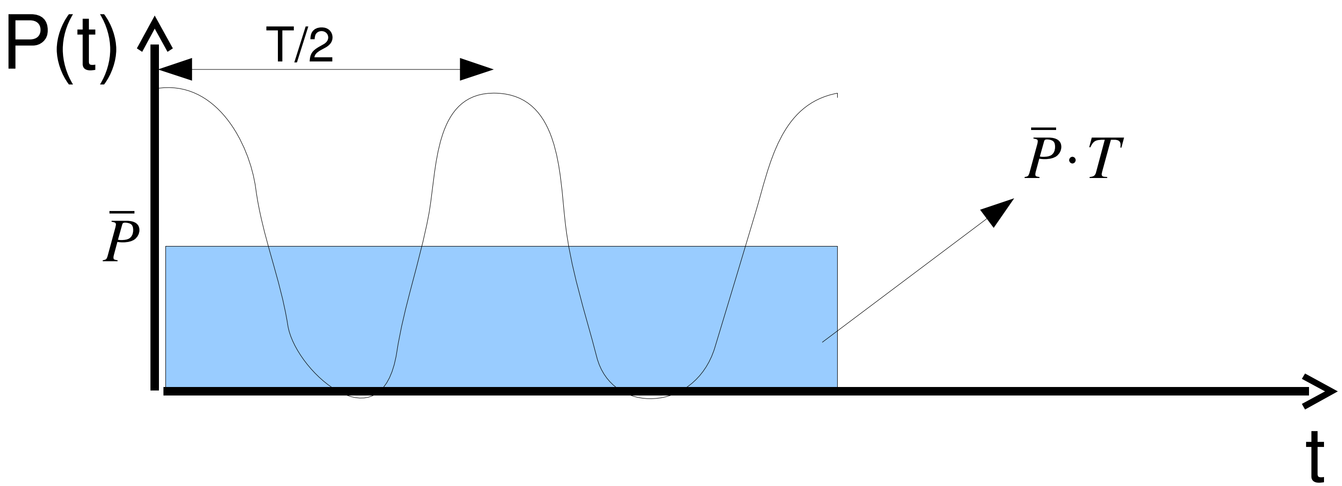
$$I(t)=\frac{1}{R}U(t)=\frac{U_0}{R}\cos(\omega\ t)=I_0\cos(\omega\ t)$$

$$U_0=RI_0$$

$$P(t)=U(t)I(t)=\frac{U_0^2}{R}\cos^2(\omega\ t)=I_0^2 R\cos^2(\omega\ t)$$

Mittlere Leistung für beliebige periodische Wechselspannung:

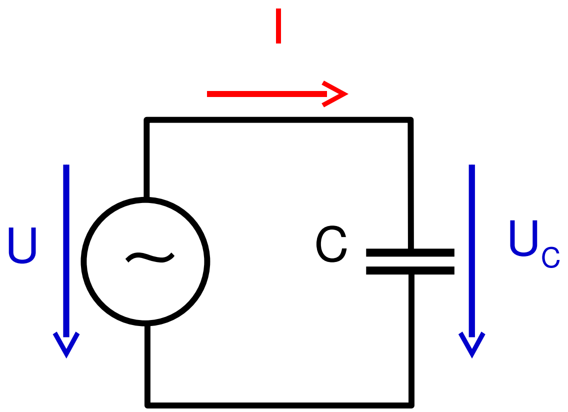
$$\bar{P}=\frac{1}{T}\int_0^T U_0 I_0\cos^2(\omega t)\,dt=\frac{1}{2}U_0 I_0=\frac{U_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}}=U_{eff}I_{eff}$$



2.1.6. Wechselstromwiderstände

$$I(t) = \dot{Q}(t) = C\frac{d}{dt}\left(U_0 \cos(\omega t)\right)$$

$$= -C\,U_0\,\omega \sin(\omega t) = C\,U_0\,\omega \cos(\omega t + 90°)$$

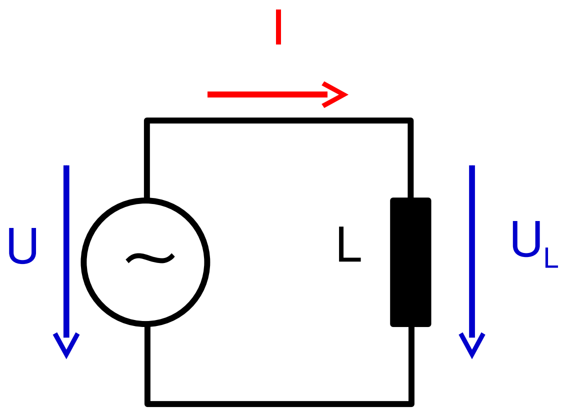


Strom gegenüber Spannung phasenverschoben: Strom eilt der Spannung um 90° voraus.

Kapazitiver Widerstand: $1/\omega C$

$$I(t) = \frac{U_0}{L}\int \cos(\omega t)\,dt$$

$$= \frac{U_0}{\omega L}\sin(\omega t) = \frac{1}{\omega L}U_0 \cos(\omega t - 90°)$$



Strom gegenüber Spannung phasenverschoben: Strom eilt der Spannung um 90° nach.

Induktiver Widerstand: ωL