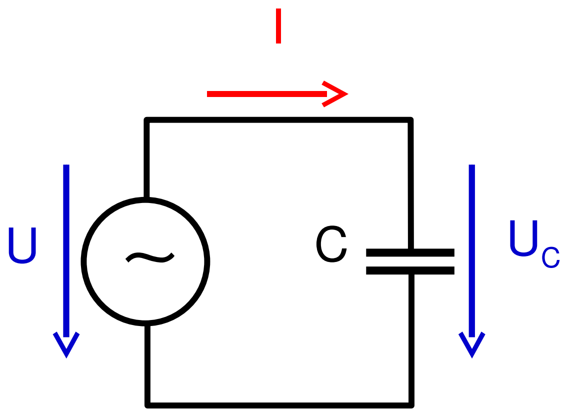
2.1.6. Wechselstromwiderstände

$$I(t) = \dot{Q}(t) = C\frac{d}{dt}\left(U_0 \cos(\omega t)\right)$$

$$= -C U_0 \omega \sin(\omega t) = C U_0 \omega \cos(\omega t + 90°)$$

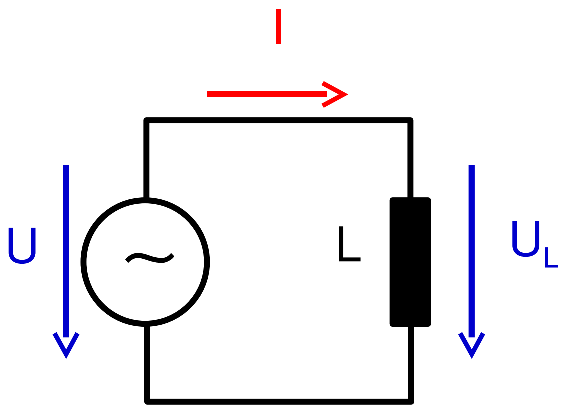


Strom gegenüber Spannung phasenverschoben: Strom eilt der Spannung um 90° voraus.

Kapazitiver Widerstand: $1/\omega C$

$$I(t) = \frac{U_0}{L}\int \cos(\omega t)\, dt$$

$$= \frac{U_0}{\omega L}\sin(\omega t) = \frac{1}{\omega L} U_0 \cos(\omega t - 90°)$$



Strom gegenüber Spannung phasenverschoben: Strom eilt der Spannung um 90° nach.

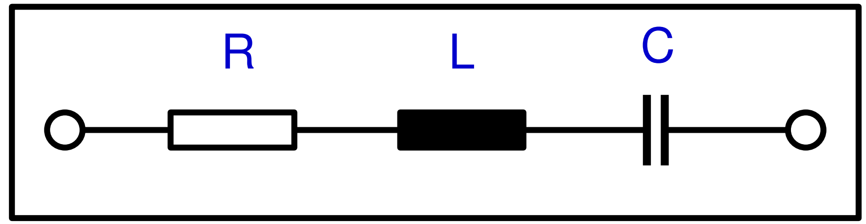
Induktiver Widerstand: ωL

$$\bar{P} = \frac{1}{T} U_0 I_0 \int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi)\, dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos\phi \;\Rightarrow\; \pm\phi = 90°:\; \bar{P} = 0$$

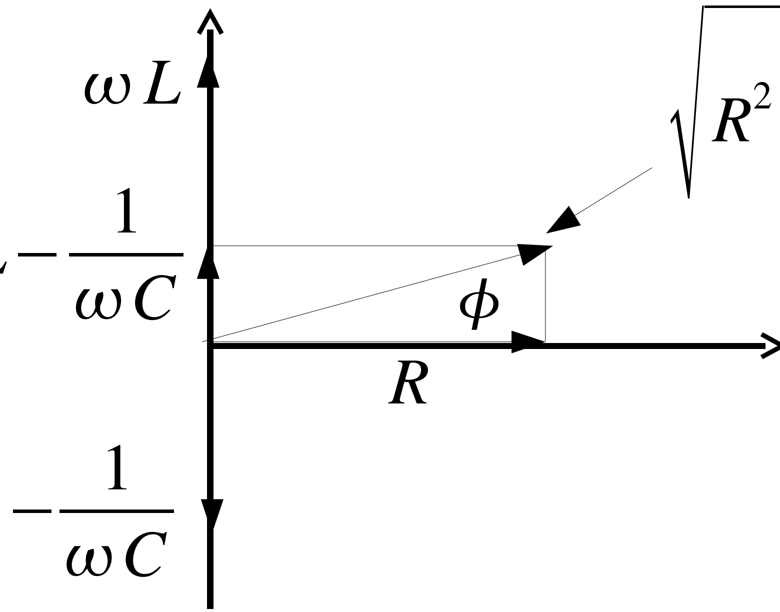
RLC-Serienschaltung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \text{ mit}$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$$



Zeigerdiagramm:



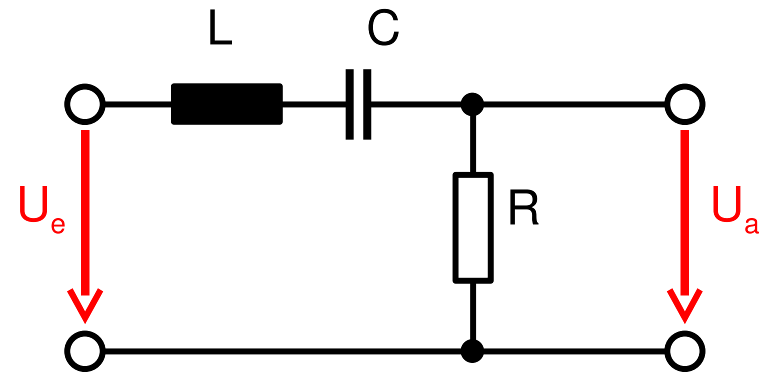
Gesamtwiderstand

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

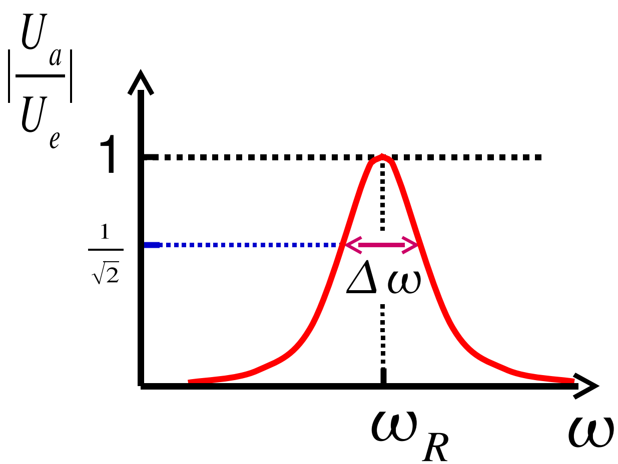
$$\tan \phi = \frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{\omega\ C}\right)$$

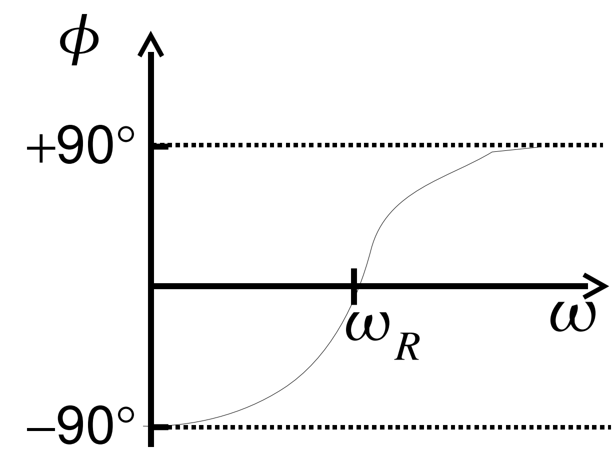
RLC-Serienschaltung



$$|U_a| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} |U_e|$$

---> Frequenzfilter:





Resonanzfrequenz:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$|U_a|(\omega_R \pm \Delta\omega/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} |U_a|(\omega_R)$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{R}{L} \text{ Maß für Frequenzbreite}$$

2.2 Elektromagnetische Wellen

2.2.1 Ebene periodische elektrische Wellen im Vakuum

Besonders einfache Lösungen der Wellengl., wenn E nur von einer Koordinate abhängt:

$$\text{Z. Bsp.: } \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \vec{0} \quad \Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{Vakuum: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \;\Rightarrow\; E_z = a = const. \text{ (Wähle a=0)} \;\Rightarrow\; \vec{E} = (E_x, E_y, 0)$$

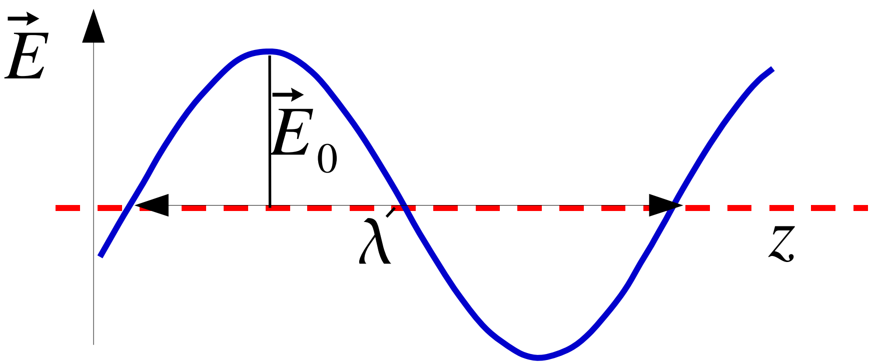
$$\vec{E}(t,z) = \vec{E}_0 \sin[k \cdot (z - c \cdot t)] \text{ Lösung von } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\text{, denn}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \vec{E}_0 \cdot k \cdot \cos[k \cdot (z - c \cdot t)] = -\vec{E}_0 \cdot k^2 \cdot \sin[k \cdot (z - c \cdot t)]$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \vec{E}_0 \cdot kc \cdot \cos[k \cdot (z - c \cdot t)] = -\frac{1}{c^2} \vec{E}_0 \cdot k^2 c^2 \cdot \sin[k \cdot (z - c \cdot t)]$$

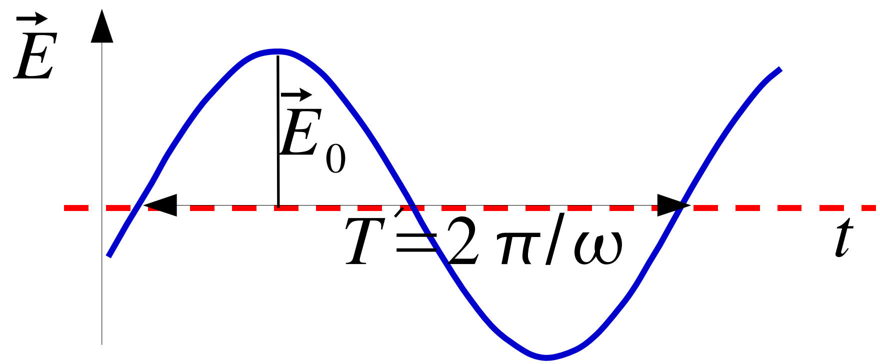
$\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ steht senkrecht auf Ausbreitungsrichtung z!

Momentaufnahme zum Zeitpunkt t_1:



$k \cdot \lambda = 2\pi$ (k: Wellenzahl)

Zeitabhängigkeit am festen Ort z_1:



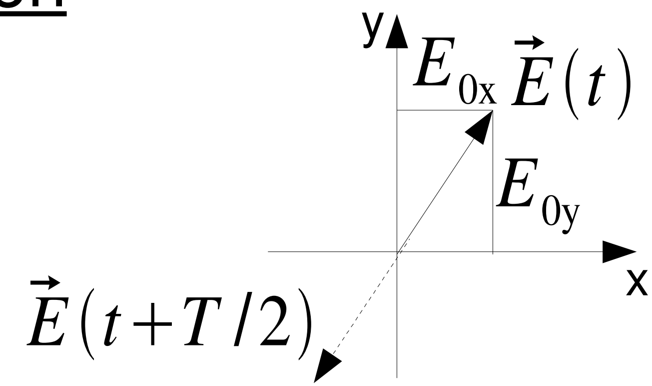
$k \cdot c \cdot T = 2\pi = k \cdot \lambda \;\Leftrightarrow\; c = \nu \cdot \lambda$

Damit: $\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 \sin\left[k z - \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot t\right] = \vec{E}_0 \sin[k z - \omega \cdot t]$

Ebene Welle: für $z = z_0$ und festem t Flächen konstanter Phase

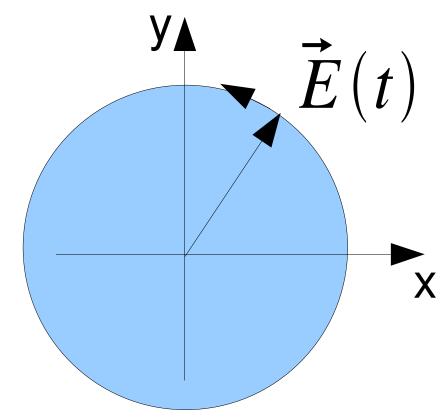
$$z - ct = const. \Rightarrow \frac{dz}{dt} = c \text{ (Phasengeschwindigkeit)}$$

2.2.2 Polarisation elektromagnetischer Wellen



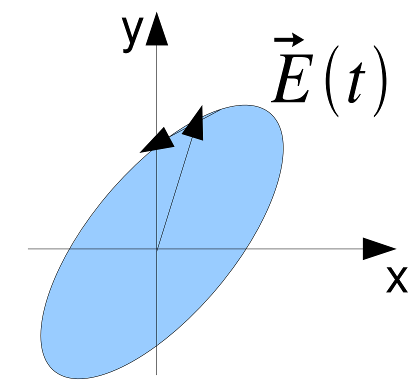
Linear polarisiert:

$$E_x = E_{0x} \cdot \sin[k z - \omega \cdot t]$$
$$E_y = E_{0y} \cdot \sin[k z - \omega \cdot t]$$



Zirkular polarisiert:

$$E_x = E_0 \cdot \sin[k z - \omega \cdot t]$$
$$E_y = E_0 \cdot \sin[k z - \omega \cdot t + \pi/2]$$



Elliptisch polarisiert:

$$E_x = E_0 \sin[k z - \omega \cdot t]$$
$$E_y = E_0 \sin[k z - \omega \cdot t + \phi], \phi \neq \pm\pi/2$$

oder

$$E_x = E_{0x} \cdot \sin[k z - \omega \cdot t], E_{0x} \neq E_{0y}$$
$$E_y = E_{0y} \cdot \sin[k z - \omega \cdot t + \pi/2]$$

Unpolarisiert: Zeitabhängige Dipole einzelner Atome statistisch verteilt

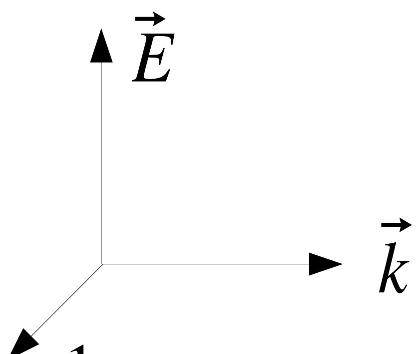
2.2.3 Magnetfeld elektromagnetischer Wellen

Betrachte linear-polarisierte elektrische Welle: $\vec{E}(t,z)=E_0\vec{e}_x\sin[kz-\omega\cdot t]$

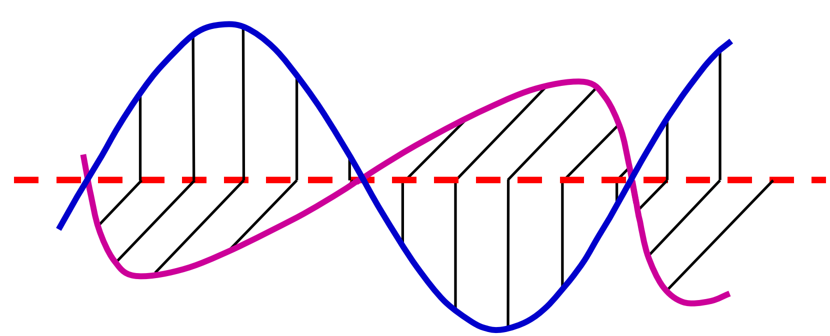
$$-\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\left(\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y},\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z},\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)=\left(0,\frac{\partial E_x}{\partial z},0\right)=\left(\frac{\partial B_x}{\partial t},\frac{\partial B_y}{\partial t},\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

Damit: $-\dfrac{\partial B_y}{\partial t}=\dfrac{\partial E_x}{\partial z}=k\,E_0\cos[kz-\omega\cdot t]$

$$\Rightarrow\quad B_y=-k\,E_0\int\cos[kz-\omega\cdot t]\,dt=\frac{k}{\omega}E_0\sin[kz-\omega\cdot t]$$



$$\Rightarrow\quad \vec{B}=\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E}),\quad |\vec{B}|=\frac{1}{c}|\vec{E}|$$



Gilt so nur im materiefreien Raum!

2.2.4 Energietransport durch e.m. Wellen

Energiedichte der e.m. Welle: $w_{em} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(E^2 + c^2 B^2\right) = \epsilon_0 E^2$

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{1}{c}\left|\vec{E}\right|$$

Energie pro Zeit- und Flächeneinheit: $\tilde{I} = c \cdot w_{em} = c\,\epsilon_0 E^2$
(Intensität oder Energiestromdichte)

Richtung des Energieflusses (Poynting-Vektor): $\vec{S} = \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \epsilon_0 c^2 \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \| \vec{k}$

$$S = \left|\vec{S}\right| = \epsilon_0 c^2 \left|\vec{E}\right|\left|\vec{B}\right| = \epsilon_0 c \left|\vec{E}^2\right| = \tilde{I}\,, \quad [S] = 1\,W/m^2$$

Intensität ~1/r², denn die Strahlungsenergie, die durch eine geschlossene Kugeloberfläche (~r²) fließt, ist unabhängig von der gewählten Fläche (Energieerhaltung!).